MATEMÁTICA

Matemática – Questão 01

Seja **z** um número complexo de módulo unitário que satisfaz a condição $z^{2n} \neq -1$, em que **n** é um número inteiro positivo.

DEMONSTRE que $\dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$ é um número real.

Resolução:

$z = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta = \text{cis}\,\theta \Rightarrow z^n = \text{cis}(\theta n)$ e $z^{-n} = \text{cis}(-\theta n)$

Dividindo numerador e denominador por $z^n \neq 0$, temos

$$\frac{z^n}{1+z^{2n}} = \frac{\dfrac{z}{z^n}}{\dfrac{1}{z^n}+\dfrac{z^{2n}}{z^n}} = \frac{1}{z^{-n}+z^n} =$$

$$= \frac{1}{\cos(-n\theta)+i\,\text{sen}(-n\theta)+\cos(n\theta)+i\,\text{sen}(n\theta)} = \frac{1}{2\cos(n\theta)} \in \text{IR}$$

Matemática – Questão 02

DETERMINE todos os valores reais de **x** que satisfazem a equação:

$|\log(12x^3\text{-}19x^2\text{+}8x)| = \log(12x^3\text{-}19x^2\text{+}8x)$

onde log (y) e $|y|$ representam, respectivamente, o logaritmo na base 10 e o módulo de y.

Resolução:

Condição de existência

$12x^3 - 19x^2 + 8x > 0$

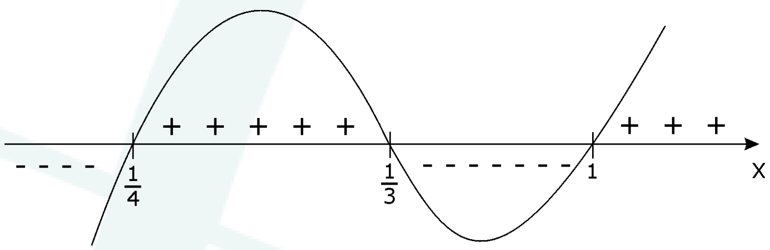
$$\left|\log\left(12x^3 - 19x^2 + 8x\right)\right| = \log\left(12x^3 - 19x^2 + 9x\right) \Leftrightarrow \log\left(12x^3 - 19x^2 + 8x\right) \geq 0$$

$12x^2 - 19x^2 + 8x \geq 1$ (já satisfeita a condição de existência do logaritmo).

$12x^3 - 19x^2 + 8x - 1 \geq 0$

Notemos que 1 é raiz do polinômio $P(x) = 12x^3 - 19x^2 + 8x - 1$. Ao dividirmos P(x) por x – 1, encontramos $12x^2 - 7x + 1$ que tem raízes 1/3 e 1/4.

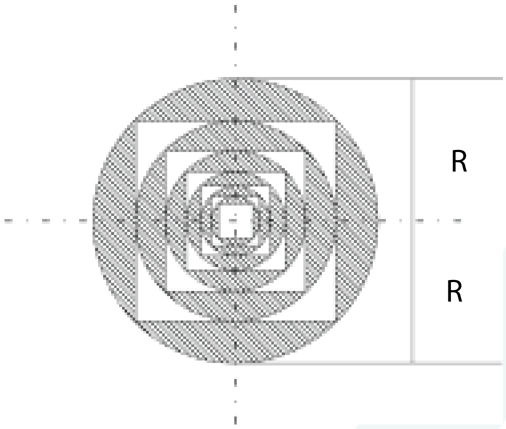
Estudando o sinal de P(x):



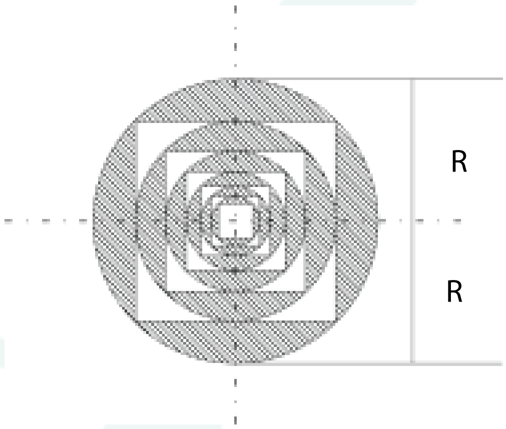
Do exposto:

S = {x ∈ IR / 1/4 ≤ x ≤ 1/3 ou x ≥ 1}

Dada uma circunferência de raio R, inscreve-se nela um quadrado. A seguir, inscreve-se uma circunferência neste quadrado. Este processo se repete indefinidamente para o interior da figura de maneira que cada quadrado estará sempre inscrito em uma circunferência e simultaneamente circunscrito por outra. **CALCULE**, em função de R, a soma das áreas delimitadas pelos lados dos quadrados e pelas circunferências que os circunscrevem, conforme mostra a figura.



Resolução:



Temos o somatório das áreas de várias figuras semelhantes, notemos que essas áreas formam uma P.G. de primeiro termo.

A_1 = Área do 1º círculo – Área do 1º quadrado

$A_1 = \pi R^2 - \left(R\sqrt{2}\right)^2$

$A_1 = R^2\,(\pi - 2)$.

Encontremos, então, razão dessa P.G.

A razão de semelhança entre uma figura e sua antecessora é $\frac{R}{R\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, e daí a razão para áreas, ou seja, da P.G. é $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$.

Assim sendo, teremos a soma $S = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots = \dfrac{A_1}{1 - \frac{1}{2}}$

$S = 2A_1$

$S = 2R^2(\pi-2)$.

RESOLVA a equação tg a + tg(2a) = 2 tg(3a), sabendo-se que a $\in$ [0, π/2).

RESOLUÇÃO:

tg a + tg(2a) = 2 . tg(3a), a $\in$ [0,π/2) $\Rightarrow$

tg 3a – tg a = tg 2a –tg 3a

Lembrando que $tgp \pm tgq = \dfrac{sen(p \pm q)}{\cos p . \cos q}$ e cos a $\neq$ 0 vem:

$\dfrac{sen\, 2a}{\cos 3a \cdot \cos a} = \dfrac{-sen\, a}{\cos 2a \cdot \cos 3a}$ $\Rightarrow$ sen 2a . cos 2a = -sen a . cos a $\Rightarrow$

2.sen a .cos a.cós 2a = -sen a.cos a $\Rightarrow$ sem a.(2.cos 2a + 1) = 0

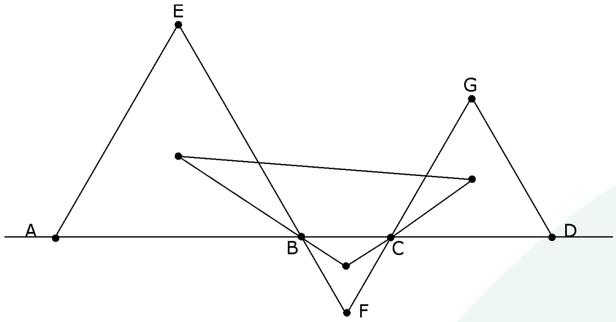
cos2a = -1/2 $\Rightarrow$ a = π/3

sen a = 0 $\Rightarrow$ a=0

$$S = \left\{0, \frac{\pi}{3}\right\}$$

Matemática – Questão 05

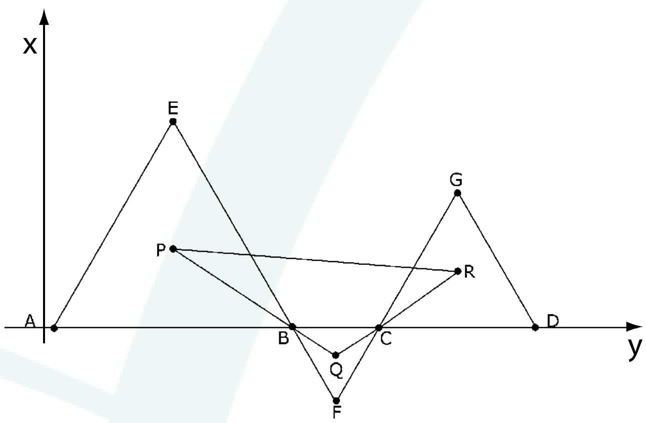
Sobre uma reta **r** são marcados os pontos A, B, C e D. São construídos os triângulos equiláteros ABE, BCF e CDG, de forma que os pontos E e G encontram-se do mesmo lado da reta **r**, enquanto que o ponto F encontra-se do lado oposto, conforme mostra a figura. **CALCULE** a área do triângulo formado pelos baricentros de ABE, BCF e CDG, em função dos comprimentos dos segmentos AB, BC e CD.



Resolução:

Solução 1:

Sem perda de generalidade, tomemos o ponto A como origem do plano cartesiano, conforme a figura seguinte.



Façamos AB = a, BC = b, CD = c e P, Q e R os baricentros dos triângulos ABE, BCF e CDG, respectivamente, logo

$$P\left(\frac{a}{2}, \frac{1}{3}\,\frac{a\sqrt{3}}{2}\right), Q\left(a+\frac{b}{2}, -\frac{1}{3}\,\frac{b\sqrt{3}}{2}\right) \text{ e } R\left(a+b+\frac{c}{2}, \frac{1}{3}\,\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{a}{2} & \dfrac{a\sqrt{3}}{6} & 1 \\ \dfrac{2a+b}{2} & -\dfrac{b\sqrt{3}}{6} & 1 \\ \dfrac{2a+2b+c}{2} & \dfrac{c\sqrt{3}}{6} & 1 \end{vmatrix}$$

$$D = -\frac{ab\sqrt{3}}{12} + \frac{a\sqrt{3}(2a+2b+c)}{12} + \frac{c\sqrt{3}(2a+b)}{12} + \frac{b\sqrt{3}(2a+2b+c)}{12} - \frac{a\sqrt{3}(2a+b)}{12} - \frac{ac\sqrt{3}}{12}$$

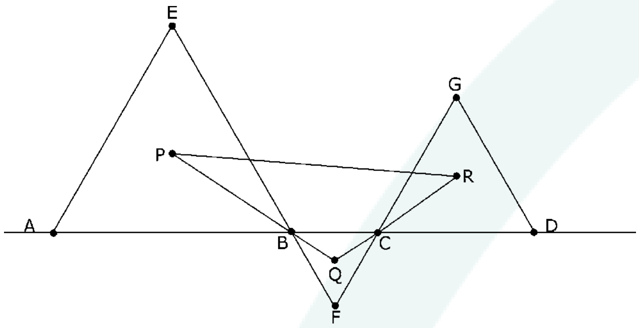
$$D = \frac{\sqrt{3}}{12}\left(2ab + 2ac + 2bc + 2b^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(ab + ac + bc + b^2\right)$$

$$S_{PQR} = \frac{1}{2}|D| = \frac{\sqrt{3}}{12}(ab + ac + bc + b^2) = \frac{\sqrt{3}}{12}[a(b+c)+b(b+c)] = \frac{\sqrt{3}}{12}(b+c).(a+b)$$

$$S_{PQR} = \frac{\sqrt{3}}{12}(BC+CD).(AB+BC).$$

Solução 2:

Façamos AB = a, BC = b, CD = c e P, Q e R os baricentros dos triângulos ABE, BCF e CDG, respectivamente.



Notemos que PB é 2/3 da altura $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ do triângulo ABE, ou seja, PB = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Analogamente QB = QC = $\frac{b\sqrt{3}}{3}$ e CR = $\frac{c\sqrt{3}}{3}$.

Notemos ainda que os ângulos QCB e QBC medem 30º cada e, portanto, o ângulo BQC mede 120º.

$$S_{PQR} = \frac{1}{2}QP.QR.\text{sen}120^0 = \frac{1}{2}.\left(\frac{b\sqrt{3}}{3} + \frac{a\sqrt{3}}{3}\right).\left(\frac{b\sqrt{3}}{3} + \frac{c\sqrt{3}}{3}\right).\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{PQR} = \frac{\sqrt{3}}{12}(ab + ac + bc + b^2) = \frac{\sqrt{3}}{12}[a(b+c)+b(b+c)] = \frac{\sqrt{3}}{12}(b+c).(a+b)$$

$$S_{PQR} = \frac{\sqrt{3}}{12}(BC+CD).(AB+BC).$$

Matemática – Questão 06

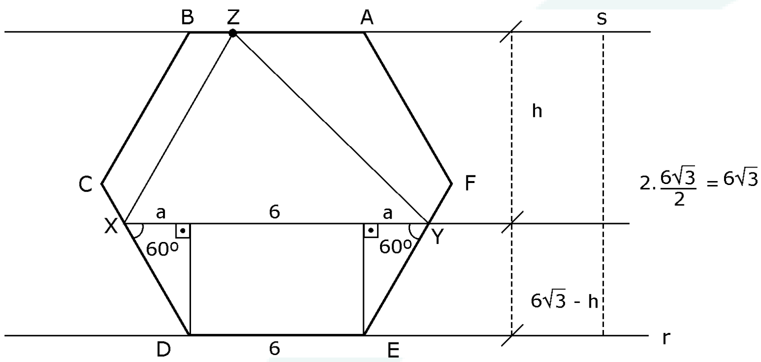
Considere um hexágono regular de 6 cm de lado. **DETERMINE** o valor máximo da área de um triângulo XYZ, sabendo-se que

A) os pontos X,Y e Z estão situados sobre lados do hexágono

B) a reta que une os pontos X e Y é paralela a um dos lados do hexágono.

Resolução:

Na figura adiante tomemos o lado XY paralelo às retas **r** e **s** e mais próximo de **r**.



Para um triângulo XYZ de área máxima o vértice Z deve estar sobre o lado AB do hexágono (maior altura). Tomemos h como a medida da altura relativa à base XY do triângulo XYZ e S sua área. No trapézio isósceles XDEY.

$$XY = 6 + 2a \text{ e } tg\,60º = \frac{6\sqrt{3}-h}{a}\text{, logo}$$

$$XY = 6 + 2.\frac{6\sqrt{3}-h}{\sqrt{3}} = 18 - \frac{2}{\sqrt{3}}.h\,.$$

Do exposto vem

$$S = \frac{1}{2}.\,XY.\,h = \frac{1}{2}.\left(18-\frac{2}{\sqrt{3}}h\right)\cdot h$$

$$S = -\frac{1}{\sqrt{3}}h^2 + 9.h\,.$$

$$S_{máxima} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\left[9^2-4\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot 0\right]}{4.\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$S_{máxima} = \frac{81\sqrt{3}}{4}$$

Sejam A e B dois subconjuntos de IN. Por definição, uma função f: A→B é crescente se $a_1 > a_2 \Rightarrow f(a_1) \geq f(a_2)$, para quaisquer a_1 e $a_2 \in$ A.

A) Para A = {1, 2} e B = {1, 2, 3, 4}, quantas funções de A para B são crescentes?

B) Para A = {1, 2, 3} e B = {1, 2, ..., n}, quantas funções de A para B são crescentes, em que **n** é um número inteiro maior que zero?

Resolução:

De acordo com a definição de função crescente, notemos que uma vez escolhidos os elementos do contradomínio B (distintos ou não) que servirão de imagem, a função de A em B é única. Logo o número de funções é dado pela combinação com repetição dos 4 elementos de B tomados 2 a 2 no item A; já no item B basta fazermos uma combinação com repetição dos n elementos tomados 3 a 3.

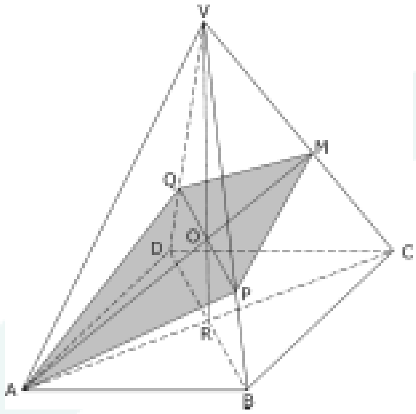
A) $CR_{4,2} = C_{4+2-1,2} = C_{5,2} = 10$

B) $CR_{n,3} = C_{n+3-1,3} = C_{n+2,3} = \dfrac{(n+2)(n+1)n}{6}$

Matemática — Questão 08

Seja uma pirâmide regular de vértice V e base quadrangular ABCD. O lado da base da pirâmide mede λ e a aresta lateral $\lambda\sqrt{2}$ Corta-se a essa pirâmide por um plano que contém o vértice A, é paralelo à reta BD, e contém o ponto médio da aresta VC. **CALCULE** a área da seção determinada pela interseção do plano com a pirâmide.

Resolução:



Na pirâmide da figura, notemos que os triângulos VAC e VDB são equiláteros de lados medindo $\lambda\sqrt{2}$ e que o ponto O é o baricentro dos dois, logo

$$VR = AM = \frac{\lambda\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{\lambda\sqrt{6}}{2}$$

Os triângulos VQP e VDB são semelhantes e a razão de semelhança é de 2/3, daí

$$PQ = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}\lambda\sqrt{2}$$

Como as diagonais do quadrilátero APMQ são perpendiculares, visto que por simetria AQ = AP e MP = MQ, sua área S será dada pelo semiproduto das diagonais, ou seja,

$$S = \frac{1}{2}\cdot AM\cdot PQ = \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{2}{3}\lambda\sqrt{2}$$

$$S = \frac{\lambda^2\sqrt{3}}{3}.$$

Matemática – Questão 09

DEMONSTRE que $\sqrt[3]{20+14\cdot\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\cdot\sqrt{2}}$ é um número inteiro múltiplo de quatro.

RESOLUÇÃO:

Façamos $\sqrt[3]{20+14\cdot\sqrt{2}}=A$, $\sqrt[3]{20-14\cdot\sqrt{2}}=B$ e $A+B=x$:

$x^3 = (A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

$x^3 = A^3 + 3AB(A+B) + B^3$

$$x^3 = 20+14\sqrt{2}+3\sqrt[3]{\left(20+14\sqrt{2}\right)\cdot\left(20-14\sqrt{2}\right)}\cdot x+20-14\sqrt{2}$$

$$x^3 = 40+3\sqrt[3]{400-392}\cdot x$$

$$x^3-6x-40=0$$

Notemos que $4^3 - 6.4 - 40 = 0$, logo 4 é raiz da equação.

Dividindo o polinômio $x^3 - 6x - 40$ por $x - 4$, temos:

4	1	0	-6	-40
	1	4	10	0 → resto

$x^2 + 4x + 10 = 0$, equação que tem discriminante $\Delta = 4^2 - 4.1.10 = -26 < 0$, daí duas raízes não reais.

Do exposto o único valor real para x é 4, ou seja, $\sqrt[3]{20+14\cdot\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\cdot\sqrt{2}}=4$; portanto, inteiro e múltiplo de 4.

c.q.d.

Considere uma matriz A, n x n, de coeficientes reais, e k um número real diferente de 1. Sabendo-se que $A^3 = kA$, **PROVE** que a matriz A+I é invertível, onde I é a matriz identidade n x n.

RESOLUÇÃO:

Façamos o produto.

$(A+I).(aA^2 + bA + cI) = aA^3 + bA^2 + cA + aA^2 + bA + cI$

$= akA + bA^2 + cA + aA^2 + bA + cI$

$= (a+b)A^2 + (ak+b+c)A + cI$

tomemos a+b = ak+b+c = 0 e c = 1, ou seja,

$a = \frac{1}{1-k}$, $b = -\frac{1}{1-k}$ e $c = 1$

notemos que

$$(A+I)\left(\frac{1}{1-k}A^2 - \frac{1}{1-k}A + I\right) =$$

$$\left(\frac{1}{1-k}A^2 - \frac{1}{1-k}A + I\right)\cdot(A+I) = I$$

e portanto $\frac{1}{1-k}A^2 - \frac{1}{1-k}A + I$ é a inversa de A + I.