ITA - 2003

3º DIA

MATEMÁTICA

Seja $z \in \mathbb{C}$. Das seguintes afirmações independentes:

I. Se $\omega = \dfrac{2iz^2 + 5\bar{z} - i}{1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|}$, então

$\bar{\omega} = \dfrac{-2i\bar{z}^2 + 5z + i}{1 + 3z^2 - 2i\bar{z} + 3|\bar{z}|^2 + 2|z|}$.

II. Se $z \neq 0$ e $\omega = \dfrac{2iz + 3i + 3}{(1 + 2i)z}$, então

$|\omega| \leq \dfrac{2|z| + 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}|z|}$.

III. Se $\omega = \dfrac{(1+i)z^2}{4\sqrt{3} + 4i}$, então $2\arg z + \dfrac{\pi}{12}$ é um argumento de ω.

é (são) **VERDADEIRA(S)**

A) todas.

B) apenas I e II.

C) apenas II e III.

D) apenas I e III.

E) apenas II.

RESOLUÇÃO:

I) Números complexos possuem as seguintes propriedades:

(1) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

(2) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$

(4) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

(5) $\bar{\bar{z}} = z$

(6)Se z é real puro $\bar{z} = z$, e se z é imaginário puro, $\bar{z} = -z$

(7) $|\bar{z}| = |z|$

Temos, então

$$\overline{\omega} = \overline{\left(\frac{2iz^2 + 5\overline{z} - i}{1 + 3\overline{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|}\right)}$$

pela propriedade (1),

$$\overline{\omega} = \frac{\overline{2iz^2 + 5\overline{z} - i}}{\overline{1 + 3\overline{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|}}$$

pela propriedade (2),

$$\overline{\omega} = \frac{\overline{2iz^2} + \overline{5\overline{z}} - \overline{i}}{\overline{1} + \overline{3\overline{z}^2} + \overline{2iz} + \overline{3|z|^2} + \overline{2|z|}}$$

pela propriedade (3),

$$\overline{\omega} = \frac{\overline{2i}\,\overline{z^2} + \overline{5}\,\overline{\overline{z}} - \overline{i}}{\overline{1} + \overline{3}\,\overline{\overline{z}^2} + \overline{2i}\,\overline{z} + \overline{3|z|^2} + \overline{2|z|}}$$

pela propriedade (4),

$$\overline{\omega} = \frac{\overline{2i}\,\overline{z}^2 + \overline{5}\,\overline{\overline{z}} - \overline{i}}{\overline{1} + \overline{3}\,\overline{\overline{z}}^2 + \overline{2i}\,\overline{z} + \overline{3|z|^2} + \overline{2|z|}}$$

pela propriedade (5),

$$\overline{\omega} = \frac{\overline{2i}.\overline{z}^2 + \overline{5}.z - \overline{i}}{\overline{1} + \overline{3}.z^2 + \overline{2i}.\overline{z} + \overline{3|z|^2} + \overline{2|z|}}$$

lembrando que |z| é real, pela propriedade (6),

$$\overline{\omega} = \frac{-2i.\overline{z}^2 + 5.z + i}{1 + 3.z^2 - 2i.\overline{z} + 3|z|^2 + 2|z|}$$

por fim, pela propriedade (7),

$$\overline{\omega} = \frac{-2i.\overline{z}^2 + 5.z + i}{1 + 3.z^2 - 2i.\overline{z} + 3|\overline{z}|^2 + 2|z|}$$

Logo, a alternativa é verdadeira.

II)

$$|\omega| = \left|\frac{2iz + 3i + 3}{(1 + 2i)z}\right|$$

$$|\omega| = \frac{|2iz + 3i + 3|}{|(1 + 2i)z|}$$

$$|\omega| = \frac{|2iz + 3i + 3|}{|(1 + 2i)|\,|z|}$$

Como $|u + v| \leq |u| + |v|$, para todo **u** e **v** complexos, temos que

$$|\omega| \leq \frac{|2iz| + |3i + 3|}{|(1 + 2i)|\,|z|}$$

$$|\omega| \leq \frac{|2i|\,|z| + |3i + 3|}{\sqrt{5}\,|z|}$$

$$|\omega| \leq \frac{2\,|z| + 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}\,|z|}$$

Logo, a alternativa é verdadeira.

III) Note que

$$1 + i = \sqrt{2}.\operatorname{cis}(\pi/4)$$
$$4\sqrt{3} + 4i = 8.\operatorname{cis}(\pi/6)$$
$$z = \rho.\operatorname{cis}(\arg z)$$

Logo, temos

$$\omega = \frac{\sqrt{2}.\operatorname{cis}(\pi/4).(\rho.\operatorname{cis}(\arg z))^2}{8.\operatorname{cis}(\pi/6)}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{2}.\operatorname{cis}(\pi/4).\rho^2.\operatorname{cis}(2\arg z)}{8.\operatorname{cis}(\pi/6)}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{2}.\rho^2}{8}.\frac{\operatorname{cis}(\pi/4).\operatorname{cis}(2\arg z)}{\operatorname{cis}(\pi/6)}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{2}.\rho^2}{8}.\operatorname{cis}(\pi/4 - \pi/6 + 2\arg z)$$

$$\omega = \frac{\sqrt{2}.\rho^2}{8}.\operatorname{cis}(\pi/12 + 2\arg z)$$

$$\arg\omega = \arg\left(\frac{\sqrt{2}.\rho^2}{8}.\operatorname{cis}(\pi/12 + 2\arg z)\right)$$

$\arg\omega = \pi/12 + 2\arg z$

E assim, a afirmação é verdadeira.
Como todas as afirmativas estão corretas, a alternativa verdadeira é a de letra A.

Gabarito: Letra **A**

O valor de y^2 – xz, para o qual os números sen $\frac{\pi}{12}$, x, y, z e sen 75º, nesta ordem, formam uma progressão aritmética, é:

A) 3^{-4}

B) 2^{-6}

C) 6^{-2}

D) 2^{-5}

E) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

RESOLUÇÃO:

Considerando que os termos x, y e z estão em P.A, podemos desenvolver a expressão cujo valor foi pedido, obtendo

$y^2 - xy = y^2 - (y - r).(y + r)$

$= y^2 - (y^2 - r^2)$

$= r^2$

Logo, precisamos da razão da P.A. Como os termos trigonométricos ocupam em uma P.A posições distantes de 4 unidades uma da outra, temos

sen 75° – sen 15° = 4r

sen (45° + 30°) – sen (45° - 30°) = 4r

$$\cancel{\text{sen } 45°.\cos 30°} + \text{sen } 30°.\cos 45° - \cancel{\text{sen } 45°.\cos 30°} + \text{sen } 30°.\cos 45° = 4r$$

2.sen 30°. cos 45° = 4r

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4r$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Logo, temos que $y^2 - xy = r^2 = 1/32 = 2^{-5}$, o que nos leva à alternativa D.

Gabarito: Letra **D**

Considere a função

$f = \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{3^{x-2}}\left(9^{2x+1}\right)^{1/(2x)} - \left(3^{2x+5}\right)^{1/x} + 1$

A soma de todos os valores de x para os quais a equação $y^2 + 2y + f(x) = 0$ tem raiz dupla é

A) 0

B) 1

C) 2

D) 4

E) 6

RESOLUÇÃO:

Para que a equação de segundo grau tenha raiz dupla, é necessário que seu discriminante seja nulo, portanto

$\Delta = 0$

$2^2 - 4.1.f(x) = 0$

$f(x) = 1$

$\sqrt{3^{x-2}}\left(9^{2x+1}\right)^{1/(2x)} - \left(3^{2x+5}\right)^{1/x} + \cancel{1} = \cancel{1}$

$3^{(x-2)/2}\left(\left(3^2\right)^{2x+1}\right)^{1/(2x)} - 3^{(2x+5)/x} = 0$

$3^{(x-2)/2}.3^{(2x+1)/x} = 3^{(2x+5)/x}$

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{2x} = \frac{2x + 5}{x}$$

Como $x \neq 0$, vem que

$X^2 - 2x - 8 = 0$

cuja soma das raízes é, por Girard, igual a 2.

Gabarito: Letra **C**

Considere uma função $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não constante e tal que

$$f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in R$$

Das afirmações:

I. $f(x) > 0, \forall x \in R$

II. $f(nx) = [f(x)]^n, \forall x \in R, \forall n \in N^*$

III. f é par.

É (são) **VERDADEIRA(S)**

A) apenas I e II.

B) apenas II e III.

C) apenas I e III.

D) todas.

E) nenhuma.

RESOLUÇÃO:

I) Para todo $x \in R$, temos que

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$$

Como f(x/2) E R, então $[f(x/2)]^2 \geq 0$, consequentemente $f(x) \geq 0$ para todo $x \in R$.

Para que a afirmativa seja verdadeira, falta provar que não existe valor u no domínio para o qual f(u) = 0. Suponhamos, pois, a existência de tal real u. Teríamos, então, para todo x do domínio, que f(x) = f(u).f(x – u) = 0. Então teríamos que f(x) = 0 para todo x real, o que contraria a condição do enunciado, segundo a qual a função não é constante. Logo, não existe um real **u** conforme foi especificado, e então a afirmativa é verdadeira.

II)

Provemos o que foi pedido por PIF:

i) Para n = 1, temos f(1.x) = f(x) = [f(x)]1, e então para n = 1 a afirmação é verdadeira.

ii) Supondo que a afirmação é válida para n = k, temos que

$f(kx) = [f(x)]^k$

Multiplicando ambos os lados por f(x), temos

$(f(x).)\ f(kx) = [f(x)]^k\ (.f(x))$

$f(x).f(kx) = [f(x)]^{k+1}$

e, aplicando ao lado esquerdo da equação a propriedade da função dada no enunciado, temos

$f(x + kx) = [f(x)]^{k+1}$

$f((k+1)x) = [f(x)]^{k+1}$

ou seja, a afirmação é válida para k + 1.

Por PIF, a afirmativa está provada para todo x real.

III)

Primeiramente, temos que $f(0) = f(0 + 0) = f(0).f(0) = [f(0)]^2$, o que faz com que f(0) = 1 ou f(0) = 0. Porém, como provado anteriormente, $f(x) \geq 0$ para todo x real, e então devemos ter f(0) = 1.

Temos então que

$f(x - x) = f(x).f(-x)$

$f(0) = f(x).f(-x)$

$1 = f(x).f(-x)$

$f(-x) = 1/f(x)$

Note que é impossível que $f(x) = 1/f(x)$ em todo o domínio, pois para tal seria necessário que $f(x) = 1$ para todo valor de x, o que é impossível, pois a função não pode ser contínua. Logo, temos que

$f(-x) = 1/f(x) \neq f(x)$

E então a afirmativa é falsa.

Gabarito: Letra **A**

Considere o polinômio $P(x) = 2x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, cujos coeficientes $2, a_2, ..., a_n$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q > 0$. Sabendo que $-\frac{1}{2}$ é uma raiz de P e que $P(2) = 5460$, tem-se que o valor de $\frac{n^2 - q^3}{q^4}$ é igual a

A) 5/4

B) 3/2

C) 7/4

D) 11/6

E) 15/8

RESOLUÇÃO:

Sabendo que os coeficientes do polinômio estão em PG, o polinômio

$P(x) = 2x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

se transforma em

$P(x) = 2x + 2qx^2 + 2q^2x^3 + ... + 2q^{n-1}x^n$

note que, estando os coeficientes do polinômio em PG de razão q, os termos do polinômio enquadram-se em uma PG de razão qx. Assim, aplicando a fórmula da soma dos termos da PG finita, temos

$$P(x) = \frac{2x.\left(q^n x^n - 1\right)}{qx - 1}$$

Como −1/2 é raiz, temos que

$$P\left(-1/2\right) = \frac{-1.\left(q^n\left(-1/2\right)^n - 1\right)}{-q/2 - 1} = 0$$

$(-q/2)^n = 1$

como $q > 0$ (pelo enunciado), então é necessário ter n par (pois não é possível um número negativo elevado a um número ímpar resultar em um número positivo), e ainda $q = 2$. Dessa forma, o polinômio fica da forma

$$P(x) = \frac{2x.\left(2^n x^n - 1\right)}{2x - 1}$$

Substituindo o valor $P(2) = 5460$ na expressão anterior, obtemos

$$5460 = \frac{4.\left(2^{2n} - 1\right)}{4 - 1}$$

$22^n - 1 = 4095$

$22^n = 2^{12}$

$n = 6$

Logo,

$$\frac{n^2 - q^3}{q^4} = \frac{36 - 8}{16} = \frac{7}{4}$$

Gabarito: Letra **C**

Dividindo-se o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por (x-1), obtém-se resto igual a 2. Dividindo-se P(x) por (x+1), obtém-se resto igual a 3. Sabendo que P(x) é divisível por (x-2), tem-se que o valor de $\frac{ab}{c}$ é igual a

A) –6

B) –4

C) 4

D) 7

E) 9

RESOLUÇÃO:

Pelo teorema do resto, temos:

$$\begin{cases} P(1) = 2 \\ P(-1) = 3 \\ P(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a + b + c + 1 = 2 \\ -1 + a + b - c + 1 = 3 \\ 32 + 16a + 4b + 2c + 1 = 0 \end{cases}$$

isolando os termos independentes e reescrevendo as equaçoes através de sua matriz dos coeficientes, fica

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 16 & 4 & 2 & -33 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 16 & 4 & 2 & -33 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 16 & 4 & 0 & -30 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

a = –3 ; b = 9/2 ; c = –3/2

logo, a expressão pedida vale

$$\frac{ab}{c} = \frac{-3.9/2}{-3/2} = 9$$

Gabarito: Letra **E**

Matemática – Questão 07

Das informações a seguir sobre a equação $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ e suas soluções no plano complexo:

I. A equação possui pelo menos um par de raízes reais.

II. A equação possui duas raízes de módulo 1, uma raiz de módulo menor que 1 e uma raiz de módulo maior que 1.

III. Se $n \in N^*$ e r é uma raiz qualquer, então $\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{r}{3}\right|^k < \frac{1}{2}$ é (são) **VERDADEIRA(S)**

A) nenhuma.

B) apenas I.

C) apenas II.

D) apenas III.

E) apenas I e III

RESOLUÇÃO:

Note que, para $z \neq 1$, $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z^5 - 1)/(z - 1)$. Essa substituição não afeta as raízes, pois $z = 1$, único termo para o qual as expressões divergem de valor, não é raiz de nenhuma delas. Portanto, para termos $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, devemos ter $(z^5 - 1)/(z - 1) = 0$, e então $z^5 = 1$. Utilizando a forma trigonométrica ($z = \rho.\text{cis }\theta$), temos que

$(\rho.\text{cis }\theta)^5 = 1.\text{ cis }0$

$\rho^5.\text{cis }5\theta = 1.\text{ cis }0$

$\rho = 1$ (as soluções encontram-se, no plano de Argand-Gauss, sobre a circunferência de centro na origem e raio 1)

$5\theta = 2k\pi$, k E Z. Como $0 \leq \theta < 2\pi$ e $\theta \neq 0$ (pois queremos $z \neq 1$), devemos ter $5\theta = 2\pi$, $5\theta = 4\pi$, $5\pi = 6\pi$ ou $5\pi = 8\pi$, o que nos leva a $S = \{2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5\}$. Julguemos, pois, as afirmativas

I. Falso. A equações não possui raízes reais.

II. Falso. Como $\rho = 1$, todas as soluções têm módulo unitário.

III. Como todos os termos do somatório são positivos, quanto maior n, maior o risco de a afirmativa ser falsa. Portanto, se a afirmativa for verdadeira para $n \to \infty$, será verdadeira para todo n. Como o módulo de todas as soluções é unitário, podemos reescrever o somatório como segue

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|z|}{3}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{3}\right)^k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

que é a soma dos termos de uma PG infinita. Como sabemos, tal soma é dada pela equação

$$S_\infty = \frac{a_0}{1-q} \therefore S_\infty = \frac{1/3}{1-1/3} \therefore S_\infty = \frac{1}{2}$$

Logo, como não é possível pegar infinitos termos em uma soma, o valor do somatório nunca ultrapassará 1/2, e então a afirmativa é verdadeira.

Gabarito: Letra **D**

Seja k $\in$ R tal que a equação $2x^3 + 7x^2 + 4x + k = 0$ possua uma raiz dupla e inteira x_1 e uma raiz x_2, distinta de x_1. Então $(k+x_1).x2$ é igual a

A) –6

B) –3

C) 1

D) 2

E) 8

RESOLUÇÃO:

Seja $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x + k$. Se x_1 é raiz dupla de f(x), então tem que ser também raiz simples de f'(x). Vejamos as raízes de f'(x):

$f'(x) = 6x^2 + 14x + 4$
$D = 196 - 4.4.6$
$x = (-14 \pm 10)/12$
x1,a = –1/3 (não convém, pois foi dito que x_1 é inteiro)
$x_{1,b} = -2$

Logo, $x_1 = -2$. Pelas relações de Girard, vemos que
$2x_1 + x_2 = -7/2$
$-4 + x_2 = -7/2$
$x_2 = 1/2$

Ainda pelas relações de Girard, temos que
$x_1^2.x_2 = -k/2$
$k = (-2)^2.2/2$
$k= -4$

Logo, $(k + x_1).x_2 = (-4 - 2)/(1/2) = -3$

Gabarito: Letra **B**

Considere o conjunto S = {(a,b) $\in$ N x N: a+b = 18}. A soma de todos os números da forma $\frac{18!}{a!b!}$ $\forall$(a,b) $\in$ S, é;

A) 86

C) 96

E) 12!

B) 9!

D) 126

RESOLUÇÃO:

Substituindo a = 18 − b na expressão cujo valor foi pedido, temos

$$\frac{18!}{a!b!} = \frac{18!}{a!(18-a)!} \therefore \frac{18!}{a!b!} = C_{18,a}$$

$$\sum_{a=1}^{18} \frac{18!}{a!b!} = \sum_{a=1}^{18} C_{18,a}$$

Note agora que esse somatório é o somatório dos termos de uma linha do triângulo de Pascal, e então

$$\sum_{a=1}^{18} \frac{18!}{a!b!} = 2^{18} = 8^{6}$$

Gabarito: Letra **A**

O número de divisores de 17640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é

A) 24

B) 36

C) 48

D) 54

E) 72

RESOLUÇÃO:

Decompondo 17640 em fatores primos, obtemos $2^3.3^2.5^1.7^2$. Para compor divisores de 17640, podemos pegar diferentes proporções de cada fator desses:

$$\begin{array}{cccc} 3 & & & \\ 2 & 2 & & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^0. & 3^0. & 5^0. & 7^0 \end{array}$$

Para que os divisores pegos sejam múltiplos de 3, a única restrição é que o expoente do 3 não pode ser o 0:

$$\begin{array}{cccc} 3 & & & \\ 2 & & & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2^0. & 3^1. & 5^0. & 7^0 \end{array}$$

Logo, temos quatro possibilidades de expoentes para o fator dois, duas para o fator três, duas para o fator cinco e três para o fator sete. Logo, o total de divisores possíveis é 4.2.2.3 = 48.

PS.: Nesse exercício, calculamos a quantidade de divisores naturais que atendiam ao enunciado. Se considerássemos divisores inteiros, a resposta seria o dobro, mas como não há essa alternativa, subentende-se que se trata dos divisores naturais.

Gabarito: Letra **C**

Sejam A e P matrizes n x m inversíveis e $B = P^{-1}AP$. Das afirmações:

I. B^T é inversível e $(B^T)^{-1} = (B^{-1})T$
II. Se A é simétrica, então B também o é.
III. $\det(A-\lambda I) = \det(B-\lambda I)$, $\forall\lambda \in R$

é(são) **VERDADEIRA(S)**

A) todas.
B) apenas I.
C) apenas I e II.
D) apenas I e III.
E) apenas II e III

RESOLUÇÃO:

I. $B = P^{-1}AP$
Tirando o determinante de ambos os lados, temos
$\det B = \det(P^{-1}AP)$
$\det B = \det P^{-1}. \det A. \det P$

$$\det B = \cancel{(\det P)^{-1}}.\det A.\cancel{\det P}$$

$\det B = \det A$

e, como A é inversível, $\det A \neq 0$, e então $\det B \neq 0$. Como $\det B = \det B^T$, então $\det B^T \neq 0$, e então BT também é inversível. A afirmação $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$ é uma conhecida propriedade de matrizes inversíveis.

II. Suponha, por exemplo, que temos $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ que satisfazem às condições do enunciado. Temos, assim, que $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 \\ -1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$, e então

$B = P^{-1}AP$

$$B = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 \\ -1/3 & 1/6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5/6 & -1/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/6 & -13/6 \\ 7/6 & 17/6 \end{bmatrix}$$

Como percebemos, B não é simétrica, e então a afirmativa é falsa.

III. $B = P^{-1}AP$

Subtraindo λI de ambos os lados, temos que

$B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda I$

Como $P^{-1}P = I$, vê-se que $B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P$

Como λ é escalar e a multiplicação de matriz por escalar é comutativa, podemos rearranjar os termos de forma que $B - \lambda I = P^{-1}AP - P^{-1}\lambda P$

Colocando P^{-1} em evidência à esqueda, temos $B - \lambda I = P^{-1}(AP - \lambda P)$

Colocando P em evidência à direita, temos $B - \lambda I = P^{-1}(A - \lambda I)P$

Tirando o determinante de ambos os lados, pelo teorema de Binet vem que

$$\det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}).\det(A - \lambda I).\det P$$

$$\det(B - \lambda I) = \cancel{(\det P)^{-1}}.\det(A - \lambda I).\cancel{\det P}$$

$$\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$$

E então a afirmativa é verdadeira.

Gabarito: Letra **D**

O número de todos os valores de $a \in [0,2\pi]$, distintos, para os quais o sistema nas incógnitas x, y e z, dado por

$$\begin{cases} -4x + y - 6z = \cos 3a \\ x + 2y - 5z = \text{sen}\, 2a \\ 6x + 3y - 4z = -2\cos a \end{cases}$$

é possível e não homogêneo, é igual a:

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

Resolução:
Primeiramente, vamos analisar o determinante da matriz dos coeficientes:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 32 - 30 - 18 + 72 - 60 + 4 = 0$$

ou seja, ou o sistema é impossível, ou possível e indeterminado. Para que seja possível, como pede o enunciado, o termo independente da linha nula que aparecer ao escalonarmos a matriz, tem que também ser nulo. Observe a matriz que representa o sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & -6 & \cos 3a \\ 1 & 2 & -5 & \text{sen}\, 2a \\ 6 & 3 & -4 & -2\cos a \end{array}\right]$$

Note que a linha nula pode ser obtida pela soma $L_3 + L_1 - 2L_2$, o que nos dá o termo independente $-2.\cos a + \cos 3a - 2.\text{sen}2a$. Igualando-o a zero, temos

$-2.\cos a + \cos 3a - 2.\text{sen}2a = 0$

$-2.\cos a + \cos 2a.\cos a - \text{sen}\, 2a.\text{sen}\, a - 2.\text{sen}\, 2a = 0$

$\cos a.(\cos 2a - 2) - \text{sen}\, 2a.(\text{sen}\, a + 2) = 0$

$\cos a.(\cos^2 a - \text{sen}^2 a - 2) - 2.\text{sen}\, a.\cos a.(\text{sen}\, a + 2) = 0$

$\cos a.(\cos^2 a - \text{sen}^2 a - 2) + \cos a.(-2.\text{sen}^2 a - 4.\text{sen}\, a) = 0$

$\cos a.(\cos^2 a - 3\text{sen}^2 a - 4.\text{sen}\, a - 2) = 0$

$\cos a.(\cos^2 a + \text{sen}^2 a - 4\text{sen}^2 a - 4.\text{sen}\, a - 2) = 0$

$\cos a.(1 - 4\text{sen}^2 a - 4.\text{sen}\, a - 2) = 0$

$\cos a.(- 4\text{sen}^2 a - 4.\text{sen}\, a - 1) = 0$

$\cos a = 0 \rightarrow a = \pi/2$ ou $a = 3\pi/2$ (soluções inválidas, pois tornam o sistema homogêneo)

ou

$4\text{sen}^2 a + 4.\text{sen}\, a + 1 = 0$

$\Delta = 16 - 16$

$\text{sen } a = -4/8$

$\text{sen } a = -1/2$

$a = 7\pi/6$ ou $a = 11\pi/6$ (soluções válidas)

Logo, as condições do problema são satisfeitas para dois valores.

Gabarito: Letra **A**

Para todo $x \in R$, a expressão $[\cos(2x)]^2.[\text{sen}(2x)]^2.\text{sen } x$ é igual a

A) $2^{-4}.[\text{sen } 2x + \text{sen } 5x + \text{sen } 7x]$
B) $2^{-4}.[2 \text{ sen } x + \text{sen } 7x.\text{sen } 9x]$.
C) $2^{-4}.[-\text{sen}(2x).\text{sen}(3x) + \text{sen}(7x)]$
D) $2^{-4}.[-\text{sen } x + 2 \text{ sen}(5x).\text{sen}(9x)]$
E) $2^{-4}.[\text{sen } x + 2 \text{ sen}(3x) + \text{sen}(5x)]$

Resolução:

$[\cos(2x)]^2.[\text{sen}(2x)]^2.\text{sen } x =$
Ajeitando os termos, temos

$$\frac{1}{2} 2 \,\text{sen}\, 2x \cos 2x.\frac{1}{4} 2.2 \,\text{sen}\, 2x \cos 2x.\text{sen}\, x =$$
$$\frac{1}{2} \text{sen}\, 4x.\frac{1}{4} 2 \,\text{sen}\, 4x.\text{sen}\, x =$$
$$\frac{1}{8} \text{sen}\, 4x.(2 \,\text{sen}\, 4x.\text{sen}\, x) =$$

Somando e subtraindo cos 4x.cos x ao interior do parênteses, temos que

$$\frac{1}{8} \text{sen}\, 4x.(\cos 4x.\cos x + \text{sen}\, 4x.\text{sen}\, x - \cos 4x.\cos x + \text{sen}\, 4x.\text{sen}\, x) =$$

$$\frac{1}{8} \text{sen}\, 4x.(\cos(4x - x) - \cos(4x + x)) =$$

$$\frac{1}{16} 2 \,\text{sen}\, 4x.(\cos(3x) - \cos(5x)) =$$

$$\frac{1}{16} (2 \,\text{sen}\, 4x.\cos 3x - 2 \,\text{sen}\, 4x.\cos 5x) =$$

$$\frac{1}{16} (\text{sen}\, 4x.\cos 3x + \text{sen}\, 3x \cos 4x + \text{sen}\, 4x.\cos 3x - \text{sen}\, 3x \cos 4x +$$
$$+ \text{sen}\, 5x \cos 4x - \text{sen}\, 4x.\cos 5x - \text{sen}\, 5x \cos 4x - \text{sen}\, 4x.\cos 5x) =$$

$$\frac{1}{16} (\text{sen}(4x + 3x) + \text{sen}(4x - 3x) + \text{sen}(5x - 4x) - \text{sen}(5x + 4x)) = 2^{-4} (2 \,\text{sen}\, x + \text{sen}\, 7x - \text{sen}\, 9x)$$

Gabarito: Letra **B**

Considere os contradomínios das funções arco-seno, e arco-cosseno como sendo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $[0, \pi]$, respectivamente. Com respeito à função $f : [-1,\ 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, f(x)= arcsen x + arccos x, temos que

A) F é não-crescente e ímpar.
B) F não é par nem ímpar.
C) F é sobrejetora.
D) F é injetora.
E) F é constante.

Resolução:

Seja a = arc sen x e b = arc cos x, temos
x = sen a
e
x = cos b = sen (π/2 – b) (esse valor é compatível com os contradomínios das funções arc sen e arc cos, pois o domínio da função arc sen é justamente atrasada de π/2 em relação ao da função arc cos).

Igualando as duas expressões para x, temos

sen a = sen (π/2 – b)

Mas, como esse seno é a função inversa de um arco-seno, ele carrega no domínio a restrição do contradomínio do arco-seno. Nesse domínio restrito, a equação acima se reduz

a = π/2 – b
a + b = π/2
arc sen x + arc cos x = π/2

Logo f(x) é uma função constante.

Gabarito: Letra **E**

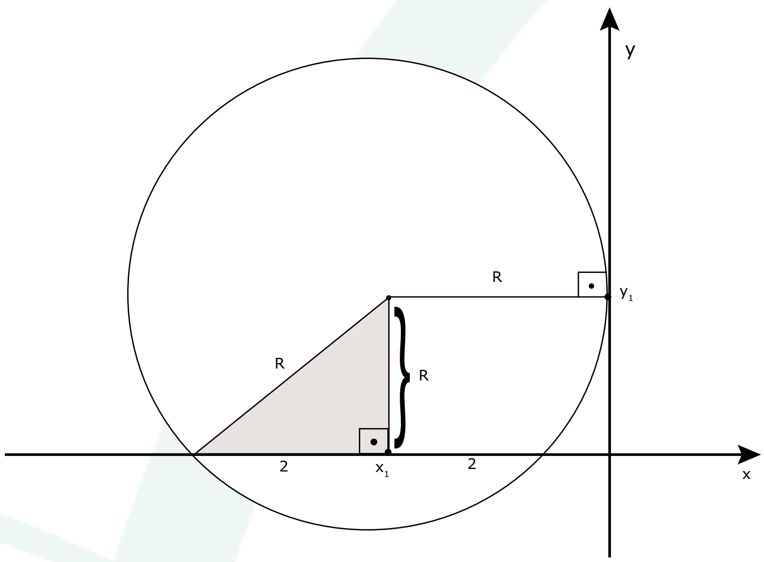
Matemática – Questão 15

Considere a família de circunferências com centros no segundo quadrante e tangentes ao eixo Oy. Cada uma destas circunferências corta o eixo Ox em dois pontos, distantes entre si de 4 cm. Então, o lugar geométrico dos centros destas circunferências é parte

A) de uma elipse.
B) de uma parábola.
C) de uma hipérbole.
D) de duas retas concorrentes.
E) da reta y = -x

RESOLUÇÃO:

Temos a situação descrita como ilustrado a seguir



Sejam (x_1,y_1) as coordenadas genéricas dos centros das circunferências dessa família. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo hachurado, temos

$2^2+h^2=R^2$

que podemos reescrever como

$$\frac{R^2}{4}-\frac{h^2}{4}=1$$

Note, entretanto, que x1 = –R e y_1 = h. Substituindo esses dados na expressão anterior, temos

$$\frac{(-x_1)^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}=1 \therefore \frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}=1$$

o que é a equação de uma hipérbole, e então o lugar geométrico dos centros das circunferências dessa família é um ramo de hipérbole.

Gabarito: Letra **C**

A área do polígono, situado no primeiro quadrante, que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto $\{(x, y) \in R^2 : 3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0\}$, é igual a

A) $\sqrt{6}$

B) $\frac{5}{2}$

C) $2\sqrt{2}$

D) 3

E) $\frac{10}{3}$

RESOLUÇÃO:

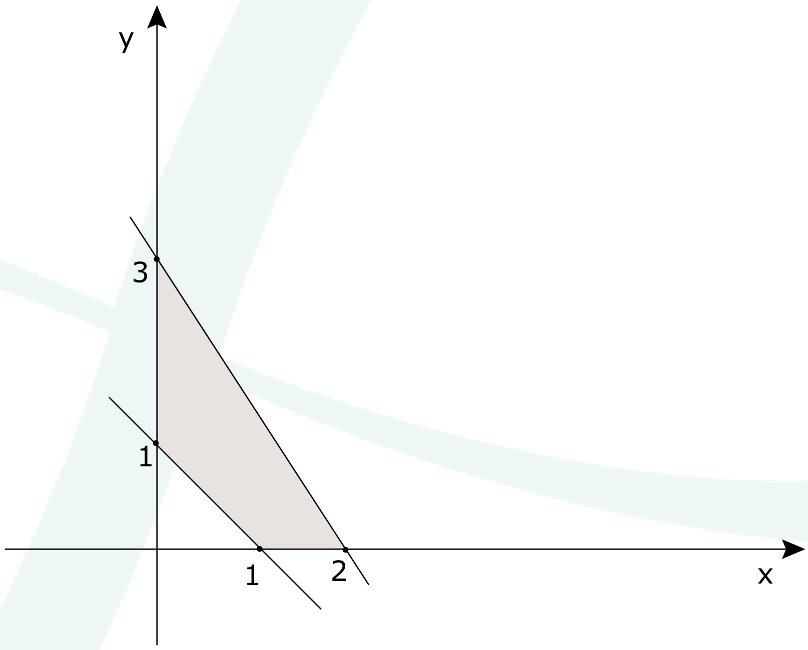
Podemos rearranjar a equação do enunciado da seguinte forma $3x^2 + (5y - 9y)x + (2y^2 - 8y + 6) = 0$ e então resolver a equação quadrática em x.

$\Delta = 25y^2 - 90y + 81 - 12(2y^2 - 8y + 6)$

$\Delta = y^2 + 6y + 9 = (y + 3)^2$

$$x = \frac{-5y + 9 \pm (y+3)}{6} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -y + 1 \\ x_2 = -2y/3 + 2 \end{matrix}$$

Assim, o conjunto dado pela equação do enunciado é composto pelas retas $y = -x + 1$ e $y = 3 - 3x/2$. Observe, no esquema a seguir, o polígono determinado por essas retas e pelos eixos coordenados:



Como percebemos, a área hachurada pode ser calculada pela diferença das áreas dos triângulos determinados por cada reta com os eixos coordenados. Numericamente, temos

$$A = \frac{3 \cdot 2}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} \therefore A = \frac{5}{2}$$

Gabarito: Letra **B**

Sejam **r** e **s** duas retas paralelas distando entre si 5 cm. Seja P um ponto na região interior a estas retas, distando 4 cm de **r**. A área do triângulo equilátero PQR, cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas **r** e **s**, é igual, em cm², a

A) $3\sqrt{15}$

B) $7\sqrt{3}$

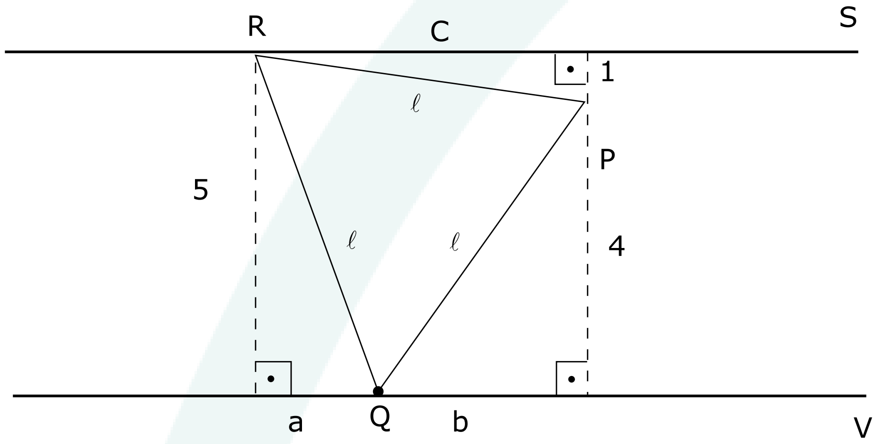
C) $5\sqrt{6}$

D) $\frac{15}{2}\sqrt{3}$

E) $\frac{7}{2}\sqrt{15}$

Resolução:

Na situação descrita, traçando por P e por R segmentos auxiliares perpendiculares a r e a s, obtemos três triângulos retângulos, conforme esquematizado a seguir:



Aplicando o teorema de Pitágoras aos três triângulos retângulos, temos

$$a^2 + 25 = l^2 \qquad a = \sqrt{l^2 - 25}$$
$$b^2 + 16 = l^2 \Rightarrow b = \sqrt{l^2 - 16}$$
$$c^2 + 1 = l^2 \qquad c = \sqrt{l^2 - 1}$$

Entretanto, pelos paralelismos da situação, vemos claramente no desenho que a + b = c. Logo

$$\sqrt{l^2 - 25} + \sqrt{l^2 - 16} = \sqrt{l^2 - 1}$$
$$l^2 - 25 + l^2 - 16 + 2\sqrt{(l^2 - 16)(l^2 - 25)} = l^2 - 1$$
$$2\sqrt{(l^2 - 16)(l^2 - 25)} = 40 - l^2$$
$$4(l^4 - 41l^2 + 400) = 1600 - 80.l^2 + l^4$$
$$3l^4 - 84.l^2 = 0$$
$$l^2(3l^2 - 84) = 0$$

$l = 0$ (inconsistente)

ou

$l^2 = 28$

A área do triângulo é dada por

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = 7\sqrt{3}$$

Gabarito: Letra **B**

Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabe-se que o produto destes três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a 3 780º. O número total das diagonais nestes três polígonos é igual a

A) 63

B) 69

C) 90

D) 97

E) 106

RESOLUÇÃO:

Sejam n_1, n_2 e n_3 os números de lados de cada polígono. Sabemos que $n_1.n_2.n_3 = 585$, que n_1, n_2 e n_3 devem ser números inteiros e que $n_1 < n_2 < n_3$. Decompondo 585 em fatores primos, obtemos: 585 = 13.5.3.3. Logo, temos, como valores para n_1,n_2 e n_3, as seguintes possibilidades:

n_1	n_2	n_3
13.3 = 39	5	3
5.3 = 15	13	3
13	3.3=9	5
13.3.3 = 117	5	1
13.5.3 = 195	3	1
5.3.3 = 45	13	1
13.5 = 65	3.3 = 9	1
13.3 = 39	5.3 = 15	1

Como percebemos, a única possibilidade em que os termos aparecem em PA é $(n_1,n_2,n_3) = (13,9,5)$.
Portanto, temos como total de diagonais do polígono

$C_{13,2} - 13 + C_{9,2} - 9 + C_{5,2} - 5 =$

$\frac{13.12}{2} - 13 + \frac{9.8}{2} - 9 + \frac{5.4}{2} - 5 =$

$78 - 13 + 36 - 9 + 10 - 5 = 97$

Gabarito: Letra **D**

Considere o triângulo isósceles OAB, com lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ de comprimento $\sqrt{2}R$ e lado $\overline{AB}$ de comprimento 2R. O volume do sólido, obtido pela rotação deste triângulo em torno da reta que passa por O e é paralela ao lado $\overline{AB}$, é igual

A) $\frac{\pi}{2}R^3$

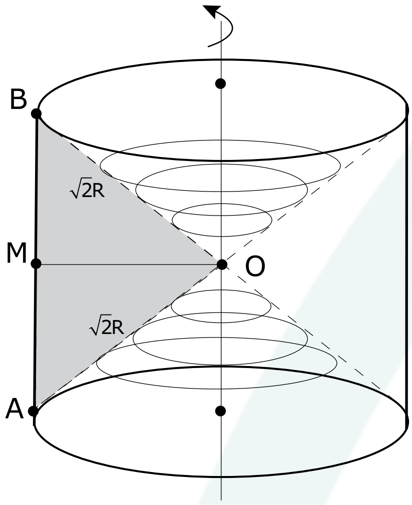
B) πR^3

C) $\frac{4\pi}{3}R^3$

D) $\sqrt{2}\pi R^3$

E) $\sqrt{3}\pi R^3$

Resolução:



Observe o desenho anterior. Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$, note que, como DAOB é isósceles retângulo, DBOM também o é, e então OM = MB = AB/2 = R. O volume pedido é o volume do cilindro (de raio OB = R) menos o volume dos dois cones inscritos ao cilindro, que são idênticos. Fazendo as contas,

$V = V_{cilindro} - 2V_{cone}$

$V = \pi R^2.2R - 2.\frac{1}{3}\pi R^2.R$

$V = \left(\frac{6}{3} - \frac{2}{3}\right)\pi R^3$

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

COMENTÁRIO:

Observe que, não por coincidência, o volume do sólido é igual ao volume de uma esfera de raio R. Isso se deve ao fato de o sólido cujo volume foi pedido ser a anticlépsidra, cujo volume, pelo princípio de Cavalieri, podemos demonstrar ser igual ao volume da esfera.

Gabarito: Letra **C**

Considere uma pirâmide regular de altura igual a 5 cm e cuja base é formada por um quadrado de área igual 8 cm². A distância de cada face desta pirâmide ao centro de sua base, em cm, é igual a

A) $\frac{\sqrt{15}}{3}$

B) $\frac{5\sqrt{6}}{9}$

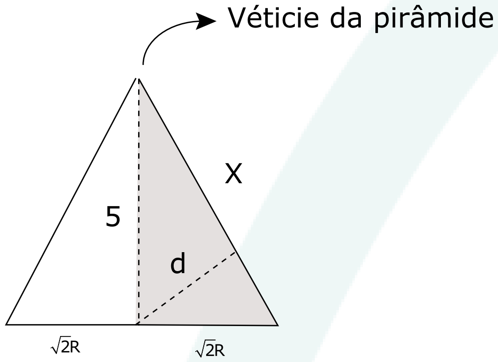
C) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$

D) $\frac{7}{5}$

E) $\sqrt{3}$

Resolução:

Note que um retângulo de área 8 cm² tem lado valendo $2\sqrt{2}$ cm². Considere na pirâmide a seção definida por um plano que passa por seu vértice e é perpendicular à base e a duas faces opostas. Tal seção aparece ilustrada a seguir:



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo hachurado, temos

$X^2 = 25 + 2$
$x = 3\sqrt{3}$

Igualando duas diferentes expressões para a área do mesmo triângulo hachurado, obtemos

$$\frac{d.3\sqrt{3}}{2} = \frac{5.\sqrt{2}}{2} \Rightarrow d = \frac{5.\sqrt{6}}{9}$$

Gabarito: Letra **B**

Sejam U um conjunto não-vazio e $A \subset U$, $B \subset U$. Usando apenas as definições de igualdade, reunião, interseção e complementar, **PROVE** que:

I. Se $A \cap B = \varnothing$, então $B \subset A^C$.

II. $B \backslash A^C = B \cap A$.

RESOLUÇÃO:

I.

$B \subset U \Leftrightarrow B \cap U = B$

Como, pela definição de complementar, $A \cup A^C = U$, da equação anterior temos

$B \cap \left(A \cup A^C\right) = B$

$(B \cap A) \cup \left(B \cap A^C\right) = B$

Como, pelo enunciado, $B \cap A = \varnothing$, vem que

$B \cap A^C = B$

E consequentemente $B \subset A^C$.

II.

$B \backslash A^C = \{x \in U / \ x \in B \text{ e } x \notin A^C\}$

Entretanto, pelo conceito de complementar, sabemos que $\forall\ x \in U,\ x \notin A^C \Leftrightarrow x \in A$, e então o conjunto $B \backslash A^C$ pode ser reescrito como

$B \backslash A^C = \{x \in U / \ x \in B \text{ e } x \in A\}$

O que é, pela definição, a interseção dos conjuntos A e B.

$B \cap A = \{x \in U / \ x \in A \text{ e } x \in B\}$

Matemática — Questão 22

Determine o conjunto dos números complexos z para os quais o número

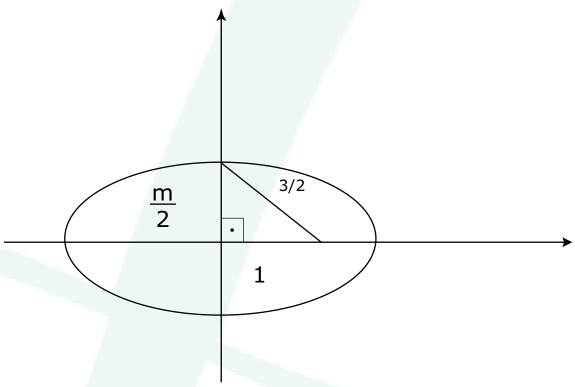
$$\omega = \frac{z + \bar{z} + 2}{\sqrt{|z-1| + |z+1| - 3}}$$

pertence ao conjunto dos números reais.
Interprete (ou identifique) este conjunto geometricamente e **FAÇA** um esboço do mesmo.

RESOLUÇÃO:
Seja z = a + bi, a,b $\in$ R, o numerador da expressão vale a + bi + a – bi + 2 = 2a + 2
o que é sempre um número real. Então, para que ω seja um número real, o denominador também precisa ser real:

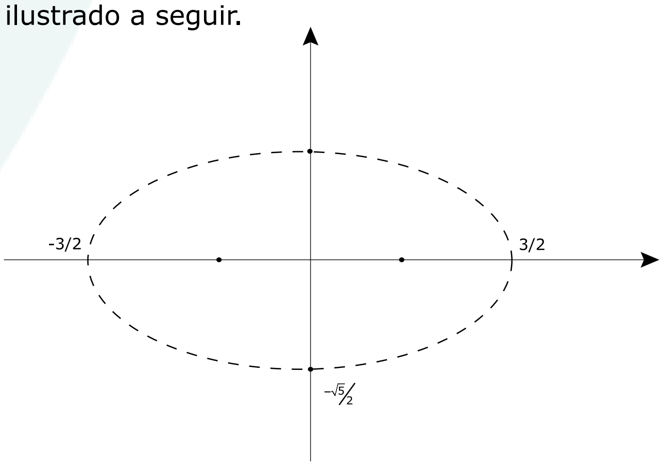
$$\sqrt{|z-1| + |z+1| - 3} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z-1| + |z+1| - 3 > 0 \Leftrightarrow |z-1| + |z+1| > 3$$

Traduzindo para português a inequação anterior, temos que, para que um dado ponto do plano complexo pertença ao conjunto desejado, a distância (módulo) dele até o ponto (1,0) somada à distância dele ao ponto (–1,0) tem que ser superior a três. Como sabemos, uma elipse é o conjunto dos pontos cuja distância até um ponto específico (um dos focos) somada à distância até outro ponto específico (o outro foco) é constante (igual à medida do semieixo maior). Então, o conjunto pedido é o dos pontos exteriores a uma elipse. A medida do semieixo menor pode ser calculada através do teorema de Pitágoras, como na ilustração a seguir:



$$\frac{m^2}{4} + 1 = \frac{9}{4} \Rightarrow m = \sqrt{5}$$

O conjunto dos números complexos pedido é composto pelos pontos do plano complexo exteriores à elipse de focos (–1,0) e (1,0) e que passa pelos pontos $\left(-\frac{3}{2},0\right),\left(\frac{3}{2},0\right),\left(0,-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ e $\left(0,\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, conforme ilustrado a seguir.



Considere a seguinte situação baseada num dos paradoxos de Zenão de Eleia, filósofo grego do século V A.C. Suponha que o atleta Aquiles e uma tartaruga apostam uma corrida em linha reta, correndo com velocidades constantes vA e vT, com 0<vT<vA. Como a tartaruga é mais lenta, é-lhe dada uma vantagem inicial, de modo a começar a corrida no instante t = 0 a uma distância d1 > 0 na frente de Aquiles. Calcule os tempos t_1, t_2, t_3, ..., que Aquiles precisa para percorrer as distâncias d_1, d_2, d_3, ..., respectivamente, sendo que, para todo n ≥ 2, dn denota a distância entre a tartaruga e Aquiles no instante $\sum_{k=1}^{n-1} t_k$ da corrida.

Verifique que os termos tk, k = 1, 2, 3, ..., formam uma progressão geométrica infinita, **DETERMINE** as soma e dê o significado desta soma.

RESOLUÇÃO:

No início da corrida (t=0), a tartaruga se encontra a uma distância d1 de Aquiles. Para percorrer essa distância, Aquiles gasta $t_1 = d_1/v_A$.

Simultaneamente, a tartaruga percorre $d_2 = v_T.t_1 = v_T.d_1/v_A$. Posteriormente, para percorrer a distância d2, Aquiles gasta $t_2 = d_2/v_A = (v_T.d_1/v_A)/v_A = v_T.d_1$/vA2. Nesse intervalo de tempo, a tartaruga percorre d3 = vT.t2 = vT.vT.d1/ vA2 = vT2.d1/ v_A^2. Para percorrer d_3, Aquiles gastará $t_3 = d_3/v_A = (v_T^2.d_1/ v_A^2)/ v_A = v_T^2.t_1/ v_A^3$; e assim sucessivamente, enquanto Aquiles percorre a distância d_n em um tempo t_n, simultaneamente a tartaruga percorre mais uma distância d_{n+1} que Aquiles terá que percorrer no instante seguinte. A cada ciclo, o tempo que Aquiles gasta para percorrer a nova distância é igual ao tempo que ele gastou para percorrer a distância anterior multiplicado por v_T/v_A, de forma que os t_k constituem uma PG de termo inicial $a_1 = d_1/v_A$ e razão $q = v_T/v_A$. Note que, como $v_T < v_A$, temos q < 1, e então está definida como sendo $S = \frac{a_1}{1 - q}$ a soma dos infinitos termos dessa PG. Dessa forma, temos que a soma dos infinitos termos da PG descrita pelos t_k vale

$$S = \frac{d_1 / v_A}{1 - v_T / v_A}$$

$$S = \frac{d_1}{v_A - v_T}$$

Como os t_k são os intervalos de tempo gastos para que Aquiles percorresse as distâncias recursivamente menores entre ele e a tartaruga, a soma desses valores é o tempo gasto por Aquiles para percorrer toda a distância que o afasta da tartaruga, e então é o tempo que Aquiles gastará para alcançá-la.

$S = \frac{d_1}{v_A - v_T}$ S é o tempo que Aquiles gasta para alcançar a tartaruga.

MOSTRE que toda função f: R\{0} → R, satisfazendo f(xy) = f(x) + f(y) em todo seu domínio, é par.

RESOLUÇÃO:

Para todo real x, podemos definir a = x^2. Sabemos que $x^2 = (-x)^2 = a$. Aplicando esses dados à equação que descreve a propriedade da função, temos

$$\left.\begin{aligned} f(a) = f(x.x) = f(x) + f(x) = 2f(x) \\ f(a) = f((-x).(-x)) = f(-x) + f(-x) = 2f(-x) \end{aligned}\right\} 2f(x) = 2f(-x) \Rightarrow f(x) = f(-x)$$

E então a função é par para todo x pertencente ao domínio.

Sejam a, b, c e d constantes reais. Sabendo que a divisão de $P_1(x) = x^4 + ax^2 + b$ por $P_2(x) = x^2 + 2x + 4$ é exata, e que a divisão de $P_3(x) = x^3 + cx^2 + dx - 3$ por $P_4(x) = x^2 - x + 2$ tem resto igual a -5, **DETERMINE** o valor de $a + b + c + d$.

RESOLUÇÃO:

Seja $Q_1(x)$ o quociente da divisão $P_1(x)/ P_2(x)$. Temos que $P_1(x) = Q_1(x).P_2(x)$, e como P_1 é de grau 4 e P_2 é de grau 2, Q_1 deve ser de grau 2. Note que, como o coeficiente do termo de grau 4 de P_1 é 1 e o coeficiente do termo de grau 2 de P_2 também é 1, o coeficiente do termo de grau 2 de Q_1 também tem que ser 1. Portanto, representemo-lo genericamente por $Q_1(x) = x^2 + ux + v$.

Temos que

$$X^4 + ax^2 + b = (x^2 + ux + v).(x^2 + 2x + 4)$$

$$X^4 + ax^2 + b = X^4 + (u + 2)x^3 + (4 + v + 2u)x^2 + (4u + 2v)x + 4v$$

Igualando os coeficientes de cada dois termos de mesmo grau, encontramos

$$\begin{cases} u + 2 = 0 \\ a = 4 + v + 2u \\ 4u + 2v = 0 \\ 4v = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -2 \\ v = 4 \\ b = 16 \\ a = 4 \end{cases}$$

Analogamente, temos que $P_3(x) = P_4(x).Q_2(x) + R_2(x)$. Note que o grau de P_3 é 3 e o de P_4 é 2, de forma que o grau de Q_2 deve ser 1. Note ainda que, novamente, o coeficiente do termo de maior grau de P_3 é igual ao coeficiente do termo de maior grau de P_4, e então o termo de maior grau de Q_2 deve ser 1. Temos que

$$x^3 + cx^2 + dx - 3 = (x^2 - x + 2)(x + w) - 5$$

$$x^3 + cx^2 + dx - 3 = x^3 + (w - 1)x^2 + (2 - w)x + (2w - 5)$$

$$\begin{cases} w - 1 = c \\ 2 - w = d \\ 2w - 5 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = 1 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

Conforme os valores anteriormente encontrados, temos que $a + b + c + d = 21$.

Sejam a, b, c e d números reais não-nulos. **EXPRIMA** o valor do determinante da matriz na forma de um produto de números reais.

$$\begin{bmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{bmatrix}$$

Resolução:

$$D = \begin{vmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}$$

Multiplicando a primeira linha por a, a segunda por b, a terceira por c e a quarta por d, temos

$$abcd.D = \begin{vmatrix} abcd & a & a^2 & a^3 \\ abcd & b & b^2 & b^3 \\ abcd & c & c^2 & c^3 \\ abcd & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

Agora, dividindo a primeira coluna por abcd, vemos que

$$\frac{\cancel{abcd}}{\cancel{abcd}}.D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

E então fica evidente que se trata do determinante de Vandermonde, que pode ser calculado pela fórmula $D = (b - a)(c - a)(d - a)(c - b)(d - b)(d - c)$.

ENCONTRE todos os valores de $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ para as quais a equação na variável real x,

$$\text{arc tg}\left(\sqrt{2}-1+\frac{e^x}{2}\right)+\text{arc tg}\left(\sqrt{2}-1-\frac{e^x}{2}\right)=a$$ admite solução.

Resolução:

Aplicando a função tangente a ambos os lados da equação, ela se transforma em

$$\text{tg}\, a = \text{tg}\left(\text{arc tg}\left(\sqrt{2}-1+\frac{e^x}{2}\right)+\text{arc tg}\left(\sqrt{2}-1-\frac{e^x}{2}\right)\right)$$

Aplicando a fórmula da tangente da soma e lembrando que, no intervalo dado, tg(arc tg θ) $=\theta$, temos

$$\text{tg}\, a = \frac{\sqrt{2}-1+\frac{e^x}{2}+\sqrt{2}-1-\frac{e^x}{2}}{1-\left(\left(\sqrt{2}-1\right)+\frac{e^x}{2}\right)\left(\left(\sqrt{2}-1\right)-\frac{e^x}{2}\right)}$$

$$\text{tg}\, a = \frac{2\sqrt{2}-2}{1-\left(\left(\sqrt{2}-1\right)^2-\frac{e^{2x}}{4}\right)}$$

$$\text{tg}\, a = \frac{8\sqrt{2}-8}{-8+8\sqrt{2}+e^{2x}}$$

$$e^{2x} = \frac{8\sqrt{2}-8}{\text{tg}\, a}-8\sqrt{2}+8 \Rightarrow e^{2x} = \left(8\sqrt{2}-8\right)\left(\frac{1-\text{tg}\, a}{\text{tg}\, a}\right)$$

Para que a equação anterior tenha solução em x, é necessário e suficiente que o lado direito da equação seja maior que zero, e como o primeiro parênteses já o é, é necessário que o segundo também seja.

$$\frac{1-\text{tg}\, a}{\text{tg}\, a} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{se } 1-\text{tg}\, a > 0, \text{ então } \text{tg}\, a > 0 & \rightarrow 0 < \text{tg}\, a < 1 \rightarrow 0 < a < \pi/4 \\ \text{se } 1-\text{tg}\, a < 0, \text{ então } \text{tg}\, a < 0 & \rightarrow \text{Não fornece soluções reais} \end{cases}$$

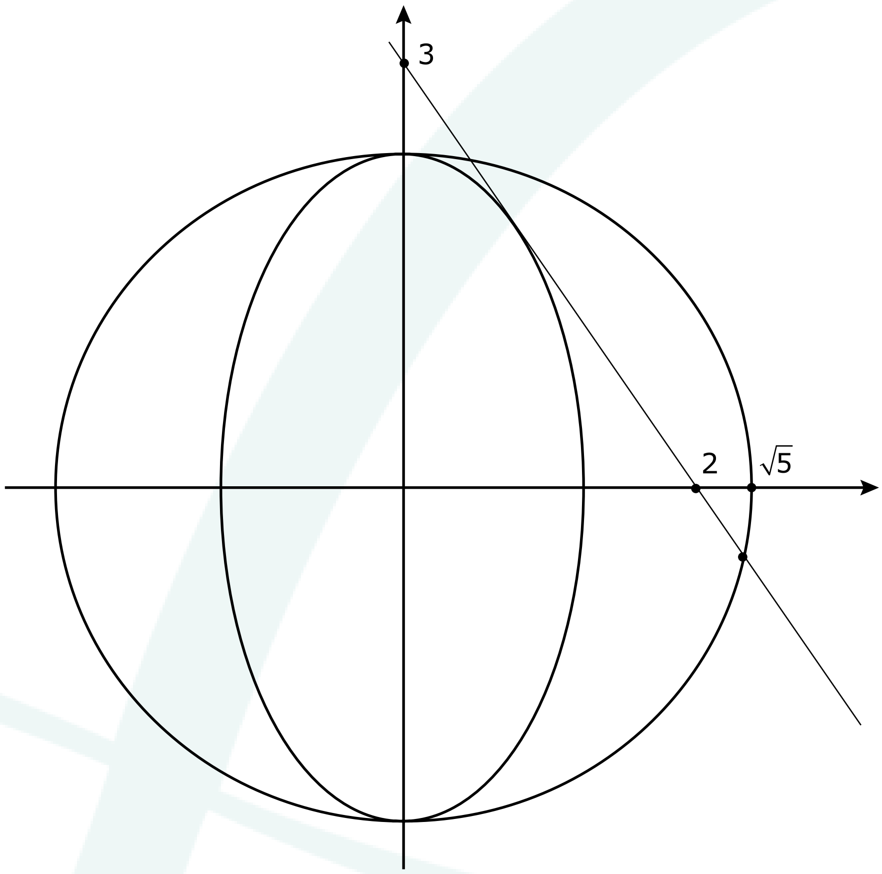
Resposta: $0 < a < \pi/4$

Matemática – Questão 28

Sabe-se que uma elipse de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tangencia internamente a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 5$ e que a reta de equação $3x + 2y = 6$ é tangente à elipse no ponto P. **DETERMINE** as coordenadas de P.

RESOLUÇÃO:

Observe a ilustração a seguir, que esquematiza a situação descrita:



A parte positiva do eixo x intercepta a circunferência em $x=\sqrt{5}$ e a reta em $x = 2$. Como $\sqrt{5}>2$ o semieixo maior da elipse, que está alinhada com os pontos de contato entre elipse e circunferência, tem que estar sobre o eixo y, pois caso contrário a reta não seria tangente à elipse (para chegar ao ponto $\left(\sqrt{5},0\right)$ da circunferência a elipse teria que cruzar a reta). Como a elipse e a reta se tangenciam internamente, temos que $b = R = \sqrt{5}$ Utilizando esse dado e fazendo a interseção entre reta e elipse, temos que

$$\left.\begin{array}{r}5x^2+a^2y^2=5a^2\\ y=3-3x/2\end{array}\right\}\ 5x^2+a^2\left(9-9x+\frac{9x^2}{4}\right)=5a^2$$

$$\left(20+9a^2\right)x^2-36a^2x+16a^2=0$$

$$\Delta=1296.a^4-64.a^2\left(20+9a^2\right)$$

$$\Delta=720.a^4-1280.a^2$$

Entretanto, como há apenas um ponto de interseção entre a reta e a elipse, a equação da interseção deve retornar apenas um valor de y e um de x, e por isso o Δ deve ser nulo:

$$720.a^4-1280.a^2=0$$
$$a^2=16/9\rightarrow a=4/3$$

Continuando a resolução da equação quadrática em x

$$x = \frac{36a^2}{40 + 18a^2}$$

Substituindo o valor de a, temos então

$$x = \frac{36.\frac{16}{9}}{40 + 18.\frac{16}{9}} \Rightarrow x = \frac{8}{9}$$

Substituindo esse valor na equação da reta, temos

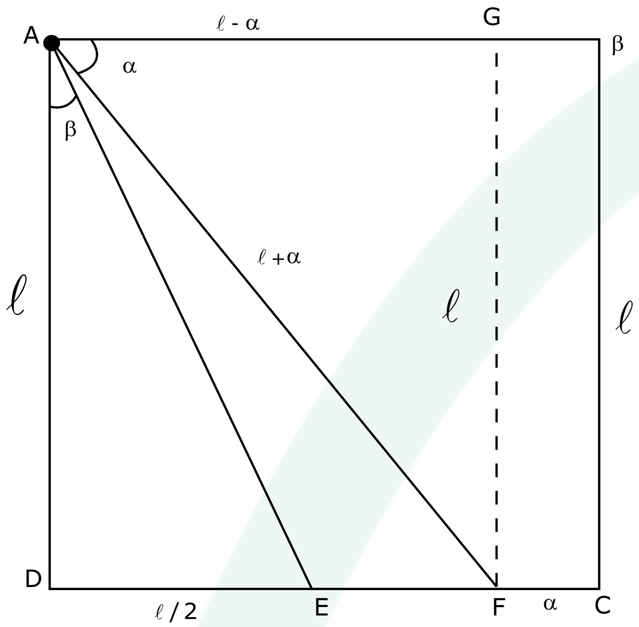
$$3.\frac{8}{9} + 2y = 6 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$$

Resposta: $P\left(\frac{8}{9}, \frac{5}{3}\right)$

Considere um quadrado ABCD. Sejam E o ponto médio do segmento $\overline{CD}$ e F um ponto sobre o segmento $\overline{CE}$ tal que $m(\overline{BC}) + m(\overline{CF}) = m(\overline{AF})$. Prove que cos α = cos 2β, sendo os ângulos $\alpha = B\hat{A}F$ e $\beta = E\hat{A}D$.

Resolução:

Seja a situação como esquematizada na ilustração a seguir:



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ACG, temos (l – a)2 + l2 = (l + a)2

$$\cancel{l^2} + \cancel{a^2} - 2al + l^2 = \cancel{l^2} + \cancel{a^2} + 2al$$

Como l ≠ 0, vem que

$$a = \frac{l}{4}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ADE, vemos que $AE = \frac{l\sqrt{5}}{2}$

Aplicando, então, as relações trigonométricas aos triângulos retângulos ADE e ACG, vemos que

$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{sen}\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $\cos\alpha = \frac{3}{5}$

E então

cos 2β=
$\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta$ =
4/5 – 1/5 =
3/5 = cos α

Ou seja, cos 2β= cos α

Quatro esferas de mesmo raio R > 0 são tangentes externamente duas a duas, de forma que seus centros formam um tetraedro regular com arestas de comprimento 2R. **DETERMINE**, em função de R, a expressão do volume do tetraedro circunscrito às quatro esferas.

RESOLUÇÃO:

Considere primeiramente os seguintes dados:

Altura de um tetraedro de lado l: $h = \dfrac{l\sqrt{6}}{3}$

Volume de um tetraedro de lado l: $V = \dfrac{l^3\sqrt{2}}{12}$

Considere as ilustrações (1) e (2) a seguir. (1) ilustra uma das faces do tetraedro grande, em que estão marcados os pontos A, B e C de contato entre o plano e as três esferas que o tocam. O triângulo ABC que aparece na imagem é a projeção da face, do tetraedro menor, que é paralela à face do tetraedro maior que está representada. As marcações de ângulos se devem ao fato de as faces do tetraedro serem triângulos eqüiláteros e às simetrias da situação. Observe o comprimento **a** assinalado. Ele é a distância entre um ponto de tangência e o vértice mais próximo. Observe agora a figura (2). Nela, está representada parte de uma seção feita no tetraedro de modo que o plano seccionador passa por dois vértices e pela metade do segmento que liga os outros dois vértices. Mais especificamente, no desenho D é um ponto de tangência entre uma esfera e uma face do tetraedro grande, V é um vértice, E é o centro de uma esfera e, consequentemente, o segmento VE pertence à altura do tetraedro maior. Note que, como o segmento VD também é a distância entre um ponto de tangência e o vértice mais próximo, ele também tem comprimento **a**.

Ilustração 1

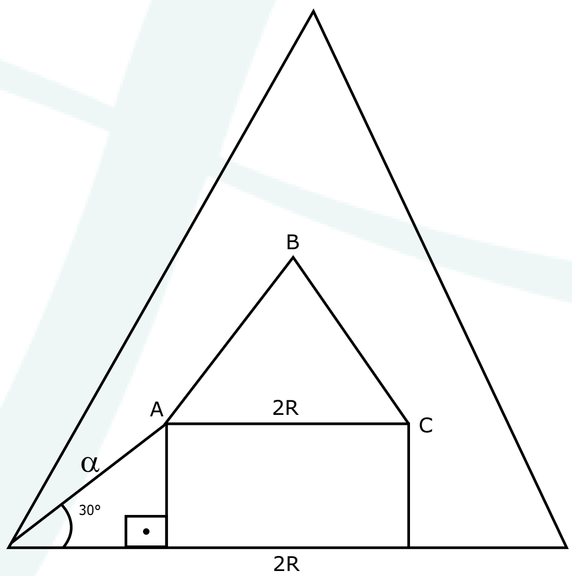
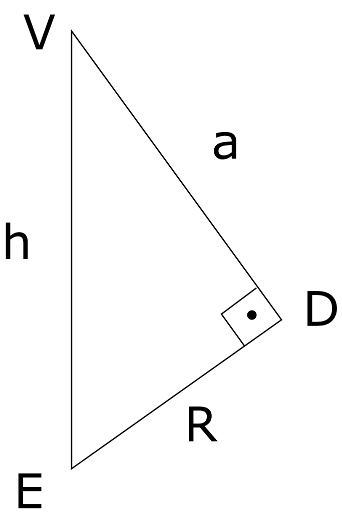


Ilustração 2



Quaisquer dois tetraedros são semelhantes, em especial, os dois do problema. Utilizando dessa semelhança, estabeleçamos uma relação entre seus lados e suas alturas:

$$\frac{l_{maior}}{l_{menor}} = \frac{h_{maior}}{h_{menor}}$$

Sabemos que l_{menor} = 2R, e então $h_{menor} = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$

Sabemos ainda, pela figura (1), que l_{maior} = 2R + 2.a.sen 60º. Note agora que h_{maior} vale a soma de R, que é a distância de uma face do tetraedro grande à face correspondente do tetraedro pequeno, com a altura do tetraedro pequeno, que já conhecemos, com $\sqrt{R^2 + a^2}$ pelo triângulo retângulo da figura 2. Jogando esses valores, obtemos

$$\frac{2R + 2.a.\text{sen } 60^o}{2R} = \frac{R + \frac{2R\sqrt{6}}{3} + \sqrt{R^2 + a^2}}{\frac{2R\sqrt{6}}{3}}$$

$$\cancel{\frac{4R^2\sqrt{6}}{3}} + 4Ra.\frac{\sqrt{6}}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 2R^2 + \cancel{\frac{4R^2\sqrt{6}}{3}} + 2R\sqrt{R^2 + a^2}$$

$$a\sqrt{2} - R = \sqrt{R^2 + a^2}$$

$$\cancel{2}a^{\cancel{2}} + \cancel{R^2} - 2\sqrt{2}R\cancel{a} = \cancel{R^2} + \cancel{a^2}$$

$$a = 2\sqrt{2}R$$

Portanto, o lado do tetraedro grande é $l_{maior} = 2R + 2.2\sqrt{2}R.\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow l_{maior} = 2R\left(1 + \sqrt{6}\right)$

E seu volume é $V = \frac{\left(2R\left(1 + \sqrt{6}\right)\right)^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = \frac{8\sqrt{2}R^3\left(1 + \sqrt{6}\right)^3}{12} \Rightarrow V = \frac{2\sqrt{2}R^3\left(1 + \sqrt{6}\right)^3}{3}$

Resposta: $V = \frac{2\sqrt{2}R^3\left(1 + \sqrt{6}\right)^3}{3}$