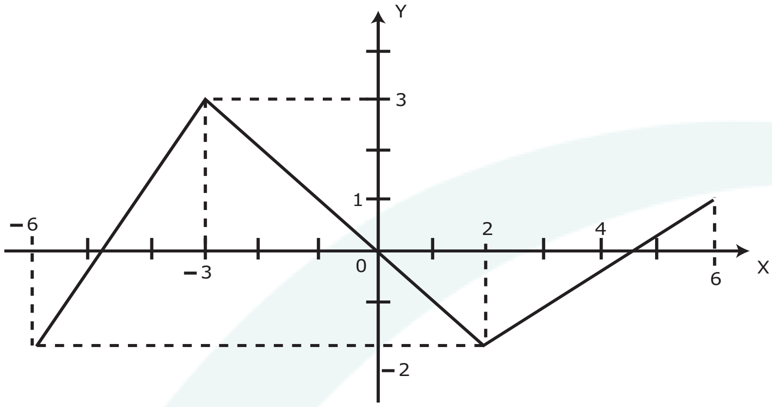
UFMG – 2004

4º DIA

MATEMÁTICA

Nesta figura, está representado o gráfico da função y = f(x), cujo domínio é o conjunto $\{x \in \mathbb{R}: -6 \leq x \leq 6\}$ e cuja imagem é o conjunto $\{y \in \mathbb{R}: -2 \leq y \leq 3\}$:

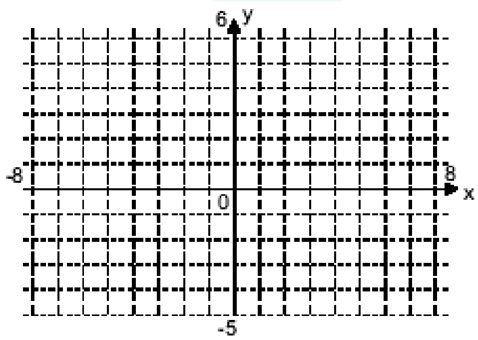


Sendo g(x) = f(x) + 2 e h(x) = f(x+2),

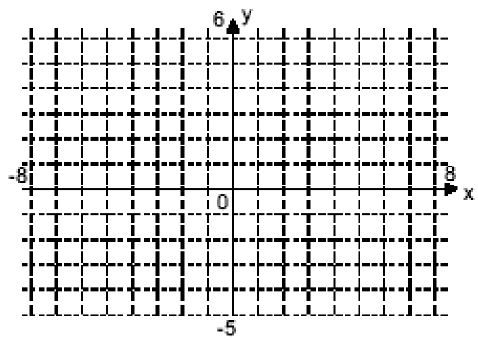
1. DETERMINE g(0) e h(0).

2. ESBOCE o gráfico de:

A) y = g(x)



B) y = h(x)



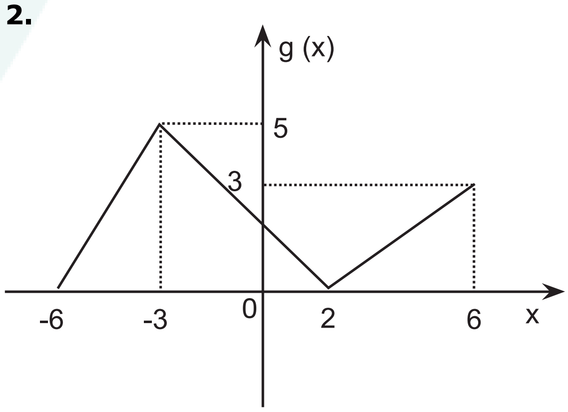
3. DETERMINE os domínios das funções g e h.

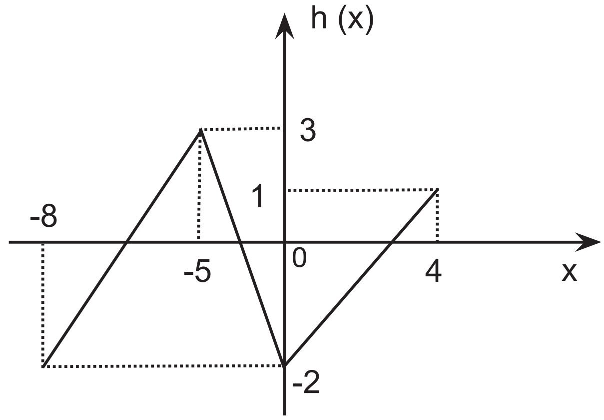
RESOLUÇÃO:

1. $g(x) = f(x) + 2 \Rightarrow g(0) = 2$

$h(x) = f(x+2) \Rightarrow h(0) = -2$

2.





3. $D(g) = \{x \in R: -6 \leq x \leq 6\}$

$D(h) = \{x \in R: -8 \leq x \leq 4\}$

Matemática — Questão 02

Seja o polinômio $P(x) = \sum_{j=1}^{n}(n+1-j)x^j = nx + (n-1)x^2 + (n-2)x^3 + \ldots + 2x^{n-1} + x^n$ em que o resto da divisão de P(x) por x − 1 é 55.

DETERMINE o grau de P(x).

RESOLUÇÃO:

$P(x) = nx + (n-1)x^2 + (n-2)x^3 + \ldots + 2x^{n-1} + x^n$

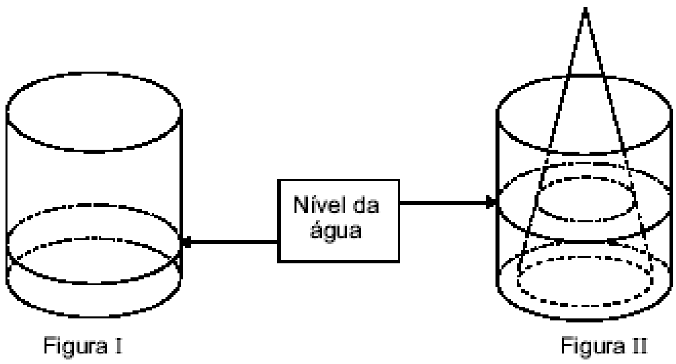
$$P(1) = 55$$

$$n + n - 1 + n - 2 + \ldots + 2 + 1 = 55$$

$$(1 + n)\frac{n}{2} = 55$$

$$n = 10$$

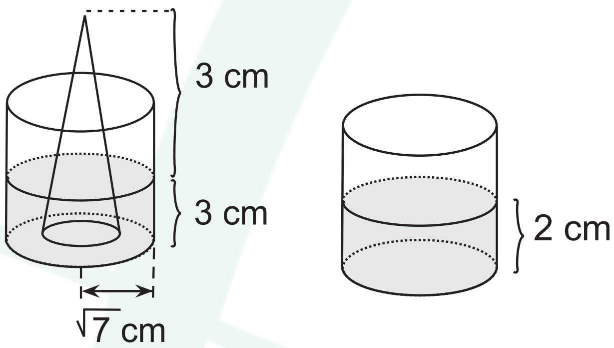
Um recipiente cilíndrico, cujo raio da base mede $\sqrt{7}$ cm, contém água até a altura de 2 cm (figura I). Colocando-se um sólido em formato de cone circular reto dentro desse recipiente, de forma que a base do cone fique totalmente apoiada na base do recipiente, o nível da água sobe até a altura de 3 cm, conforme mostrado na figura II.



Sabe-se que a medida da altura do cone é 6 cm.

Assim sendo, **CALCULE** o raio desse cone.

RESOLUÇÃO:



$$V_{tronco} + \pi \cdot \left(\sqrt{7}\right)^2 \cdot 2 = \pi \cdot \left(\sqrt{7}\right)^2 \cdot 3$$

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot 6 = 7\pi$$

$$r = 2 \text{ cm}$$

Matemática — Questão 04

Considere o triângulo ABC, cujos lados AB e AC medem 1 e cujo ângulo $B\hat{A}C$ mede 36º. Seja D a interseção da bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ com o lado AB.

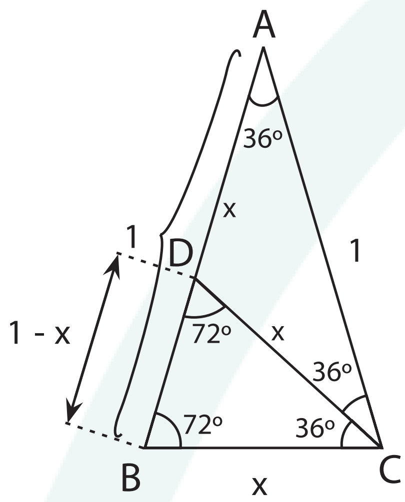
1. DEMONSTRE que os triângulos BCD e CDA são isósceles.

2. CALCULE a medida do lado BC do triângulo ABC.

3. CALCULE sen 18º.

RESOLUÇÃO:

1.



2.

$$AD = CD = BC = x$$

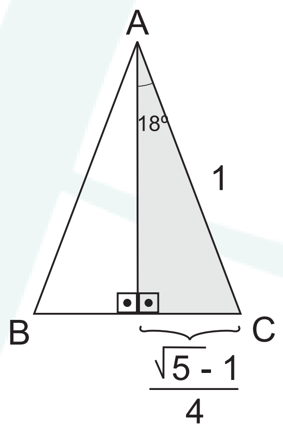
$$BD = 1 - x$$

$$\Delta BCD \sim \Delta ABC$$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 - x$$

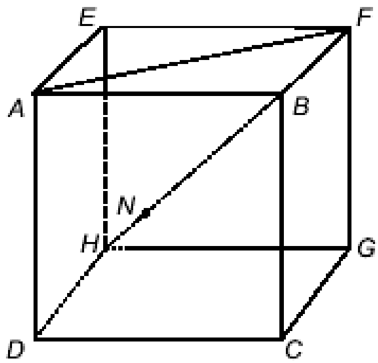
$$x = BC = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

3.



$$\text{sen } 18º = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Observe este cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G e H:



O ponto N da diagonal BH do cubo é tal que a medida do segmento BN é o dobro da medida do segmento HN.

Sabe-se que a aresta do cubo mede a.

Então, **CALCULE** o comprimento do segmento CN, em função de a.

RESOLUÇÃO:

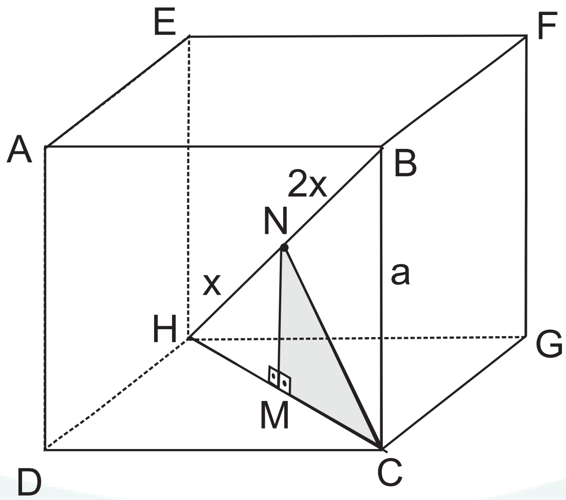
$\Delta MNH \sim \Delta BCH \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{3}$

$MN = \frac{a}{3} \quad \Rightarrow \quad MC = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$

ΔMNC

$$(CN)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}a\sqrt{2}\right)^2$$

$CN = a$



Seja Z um número complexo.
Considere este sistema:

$$\begin{cases} |Z| = 4 \\ |Z - i| = \beta \end{cases}$$

DETERMINE β para que esse sistema tenha solução **única**.

RESOLUÇÃO:

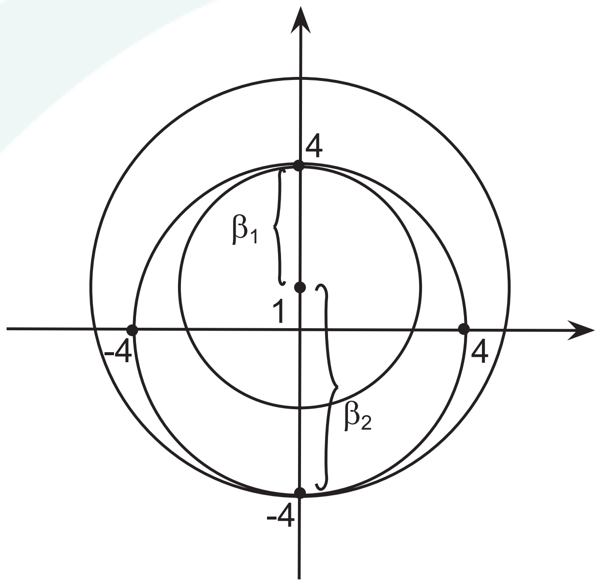
Seja z= a + bi

$$\begin{cases} |Z| = 4 \\ |Z - i| = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 16 \\ a^2 + (b-1)^2 = \beta^2 \end{cases}$$

Pela figura, temos:

$\beta_1 = 3$ (tangentes internas)

$\beta_2 = 5$ (tangentes externas)



Matemática — Questão 07

Numa escola, há 10 professores de Matemática e 15 de Português. Pretende-se formar, com esses professores, uma comissão de sete membros.

1. Quantas comissões distintas podem ser formadas?
2. Quantas comissões distintas podem ser formadas com, pelo menos, um professor de Matemática?
3. Quantas comissões distintas podem ser formadas com, pelo menos, dois professores de Matemática e, pelo menos, três professores de Português?

RESOLUÇÃO:

1. $C_{25,7} = 480.700$

2. $C_{25,7} - C_{15,7} = 474.265$

3. $C_{10,3} \,.\, C_{15,4} + C_{10,4} \,.\, C_{15,3} + C_{10,2} \,.\, C_{15,5} = 15.7.13.(120 + 70 + 99) = 1365.289$

1. Uma elipse é o conjunto de pontos no plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é uma constante igual a k.

DETERMINE a equação da elipse em que $F_1 = \left(-\sqrt{15}, 0\right)$ e $F_2 = \left(\sqrt{15}, 0\right)$ e k = 8.

2. Seja C uma circunferência de centro (1,0) e raio r.

DETERMINE os valores de r para os quais a interseção de C com a elipse do item 1 seja não vazia.

RESOLUÇÃO:

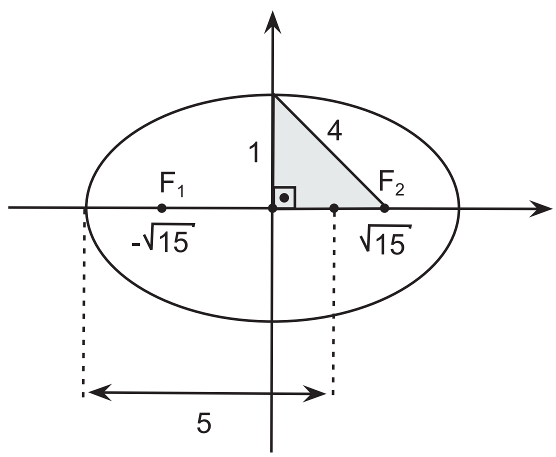
1.

$$k = 2a = 8 \Rightarrow a = 4$$

$$c = \sqrt{15}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = 1$$

Logo, a equação é: $\dfrac{x^2}{16} + y^2 = 1$



2. $c\begin{cases} C(1,0) \\ r \end{cases}$

$$(x - 1)^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + 1 - \frac{x^2}{16} = r^2$$

Para que a interseção não seja vazia, temos: $\Delta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\dfrac{14}{15}} \leq r \leq 5$

OBS.: se r > 5, a elipse é interna a circunferência.