MATEMÁTICA

Matemática — Questão 01

Considere os conjuntos $S = \{0,2,4,6\}$, $T = \{1,3,5\}$ e $U = \{0,1\}$ e as afirmações:

I. $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \varnothing$.

II. $\{2\} \subset S \backslash U$ e $S \cap T \cap U = \{0,1\}$.

III. Existe uma função $f : S \rightarrow T$ injetiva.

IV. Nenhuma função $g : T \rightarrow S$ é sobrejetiva.

Então, é(são) **VERDADEIRA(S)**

a) apenas I.

b) apenas IV.

c) apenas I e IV.

d) apenas II e III.

e) apenas III e IV.

RESOLUÇÃO:

I. Falsa. O símbolo "$\in$" é usado para relacionar um elemento e um conjunto e não para relacionar dois conjuntos. O certo seria $\{0\} \subset S$.

II. Falsa. O conjunto $S \cap T \cap U$ é formado pelos elementos que pertencem, simultaneamente, aos conjuntos S, T e U, portanto $S \cap T \cap U = \varnothing$.

III. Falsa. Como S tem mais elementos que T, então existirá $x_1 \in S$ e $x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2$, tais que $f(x_1) = f(x_2)$. Portanto, f não pode ser injetiva.

IV. Verdadeira. Pelo motivo expresso no item III, g não pode ser injetiva e portanto não poderá ser sobrejetiva.

GABARITO: Letra **B**

Em uma mesa de uma lanchonete, o consumo de 3 sanduíches, 7 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 31,50. Em outra mesa, o consumo de 4 sanduíches, 10 xícaras de café e 1 pedaço de torta totalizou R$ 42,00. Então, o consumo de 1 sanduíche, 1 xícara de café e 1 pedaço de torta totaliza o valor de

a) R$ 17,50.
b) R$ 16,50.
c) R$ 12,50.
d) R$ 10,50.
e) R$ 9,50.

RESOLUÇÃO:
Seja "s" o preço de um sanduíche, "c" o preço de uma xícara de café e "t" o preço de um pedaço de torta.

Então, temos:
Mesa 1: $3 \cdot s + 7 \cdot c + 1 \cdot t =$ R$ 31,50
Mesa 2: $4 \cdot s + 10 \cdot c + 1 \cdot t =$ R$ 42,00

Multiplicando a 1ª equação por 3 e a 2ª por 2, temos:
$9 \cdot s + 21 \cdot c + 3 \cdot t =$ R$ 94,50
$8 \cdot s + 20 \cdot c + 2 \cdot t =$ R$ 84,00

Subtraindo a 2ª equação da 1ª temos:
$1 \cdot s + 1 \cdot c + 1 \cdot t =$ R$ 10,50

GABARITO: Letra **D**

Matemática – Questão 03

Uma circunferência passa pelos pontos A = (0,2) , B = (0,8) e C = (8,8). Então, o centro da circunferência e o valor de seu raio, respectivamente, são

a) (0,5) e 6.

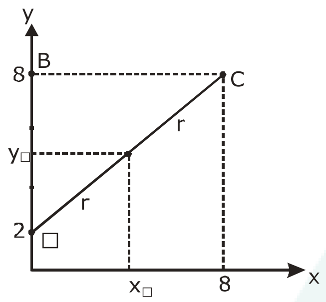
b) (5,4) e 5.

c) (4,8) e 5,5.

d) (4,5) e 5.

e) (4,6) e 5.

RESOLUÇÃO:



Observe que o ângulo $A\hat{B}C$ é reto, e como ele está inscrito na circunferência, ele determina um arco de 180°. Portanto, $\overline{AB}$ é diâmetro da circunferência.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$(2r)^2 = 6^2 + 8^2 \qquad \Rightarrow \qquad r = 5$$

O centro da circunferência será o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

$$x_c = \frac{0+8}{2} = 4 \quad \text{e} \quad y_c = \frac{2+8}{2} \qquad \therefore \qquad (X_c, y_c) = (4,5)$$

GABARITO: Letra **D**

Sobre o número $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é **CORRETO** afirmar que

a) $x \in]0, 2[$.
b) x é racional.
c) $\sqrt{2x}$ é irracional.
d) x^2 é irracional.
e) $x \in]2, 3[$.

RESOLUÇÃO:

$$x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3} \Rightarrow x - \sqrt{3} = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} \Rightarrow \left(x - \sqrt{3}\right)^2 = 7 - 4\sqrt{3}$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3} \Rightarrow x^2 - 2x\sqrt{3} = 4 - 4\sqrt{3}$$

Por inspeção, da identidade acima, temos x = 2.

GABARITO: Letra **B**

Matemática — Questão 05

Considere o triângulo de vértices A, B e C, sendo D um ponto do lado $\overline{AB}$ e E um ponto do lado $\overline{AC}$. Se m ($\overline{AB}$) = 8 cm, m ($\overline{AC}$) = 10 cm, m ($\overline{AD}$) = 4 cm e m ($\overline{AE}$) = 6 cm, a razão das áreas dos triângulos ADE e ABC é

a) $\frac{1}{2}$.

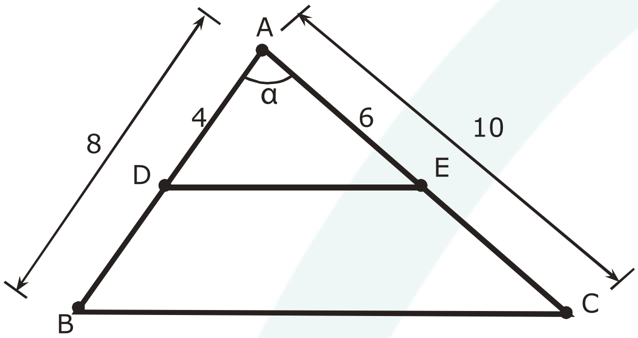
b) $\frac{3}{5}$.

c) $\frac{3}{8}$.

d) $\frac{3}{10}$.

e) $\frac{3}{4}$.

RESOLUÇÃO:



$$\frac{A(\Delta ADE)}{A(\Delta ABC)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot \text{sen}\alpha}{\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 10\cdot \text{sen}\alpha} = \frac{3}{10}$$

GABARITO: Letra **D**

Em um triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é a média geométrica das medidas dos catetos. Então, o valor do cosseno de um dos ângulos do triângulo é igual a

a) $\frac{4}{5}$

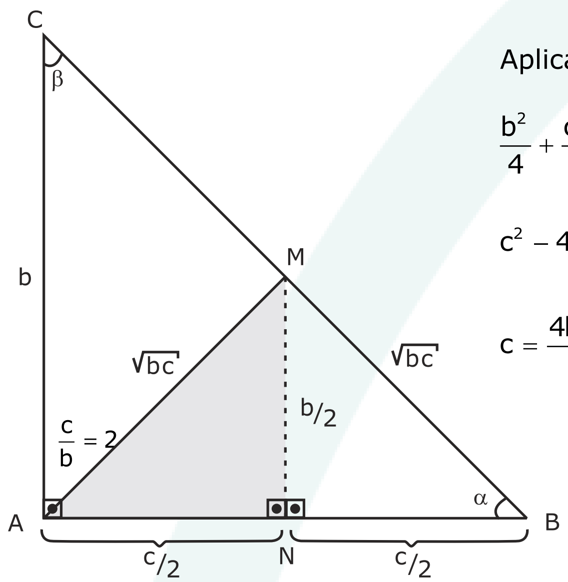
b) $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

d) $\frac{1}{4}\sqrt{4+\sqrt{3}}$

e) $\frac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

RESOLUÇÃO:



Aplicando Pitágoras no ΔAMN

$$\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} = bc$$

$$c^2 - 4bc + b^2 = 0$$

$$c = \frac{4b \pm 2\sqrt{3}b}{2}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \cos\beta = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

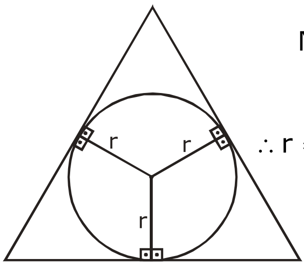
GABARITO: Letra **C**

Matemática — Questão 07

A circunferência inscrita num triângulo equilátero com lados de 6 cm de comprimento é a interseção de uma esfera de raio igual a 4 cm com o plano do triângulo. Então, a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo é (em cm)

a) $3\sqrt{3}$. b) 6. c)5. d) 4. e)$2\sqrt{5}$

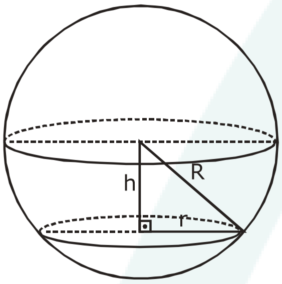
RESOLUÇÃO:



No triângulo eqüilátero, a distância do centro à um dos lados é 1/3 da altura.

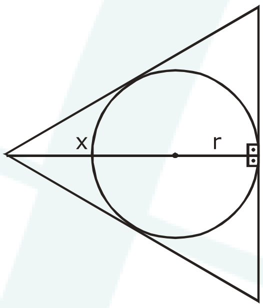
$\therefore r = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ onde $\ell = 6\text{cm}$ $\Rightarrow$ $r = \sqrt{3}$ cm

Aplicando Pitágoras ao triângulo ao lado temos:



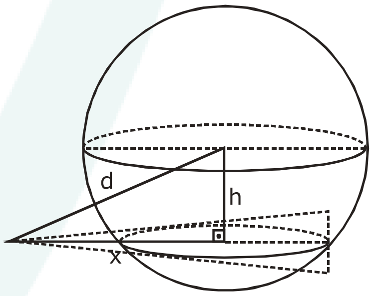
$R^2 = h^2 + r^2$, onde $R = 4\text{cm}$ e $r = \sqrt{3}$ cm

$\Rightarrow h^2 = 13\ \text{cm}^2$



No triângulo eqüilátero, a distância do centro a um dos vértices 2/3 da altura.

$\therefore x = \frac{2}{3} \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ onde $\ell = 6$ cm $\Rightarrow$ $x = 2\sqrt{3}$ cm



Aplicando Pitágoras ao triângulo ao lado temos: $d^2 = h^2 + x^2$ onde $h^2 = 13\,\text{cm}^2$ e $x = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$.

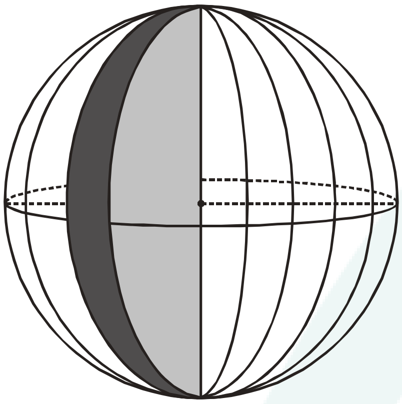
$\Rightarrow$ $d^2 = 13 + \left(2\sqrt{3}\right)^2$ $\Rightarrow d = 5\text{cm}$

GABARITO: Letra **C**

Uma esfera de raio r é seccionada por n planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semiesfera formam uma progressão aritmética de razão $\frac{\pi r^3}{45}$. Se o volume da menor cunha for igual a $\frac{\pi r^3}{18}$, então n é igual a

a) 4
b) 6
c) 3
d) 5
e) 7

RESOLUÇÃO:



Uma esfera seccionada por n planos meridianos é dividida em 2n cunhas, como a que foi destacada na figura.Portanto, em uma semiesfera temos n cunhas, cujos volumes estão em P.A. O volume da 1ª cunha e a razão da progressão foram dados e o volume da semiesfera é $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$.

Então, $\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$, onde $V_1, V_2, \cdots, V_n$ estão em P.A. Calculando a soma desta P.A., temos:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{(V_1 + V_n)n}{2}, \text{ onde } V_n = +V_1 + (n-1)r' \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{[2V_1 + (n-1)r']n}{2} \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = [2V_1 + (n-1)r']n$$

$$\text{Foram dados}: V_1 = \frac{\pi r^3}{18} \text{ e } r' = \frac{\pi r^3}{45}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \left[2\cdot\frac{\pi r^3}{18} + (n-1)\cdot\frac{\pi r^3}{45}\right]n \Rightarrow \frac{4}{3} = \left(\frac{1}{9} + \frac{n-1}{45}\right)n$$

$$\Rightarrow \quad n^2 + 4n - 60 = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 6$$

GABARITO: Letra **C**

Considere um prisma regular em que a soma dos ângulos internos de todas as faces é 7 200º. O número de vértices deste prisma é igual a

a) 11 c) 10 e) 22
b) 32 d) 20

RESOLUÇÃO:

Considere um prisma regular em que as bases são polígonos regulares de n lados. A soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é, $S_n = (n - 2)\ 180º$. Este prisma terá n faces laterais, que são quadrangulares e as duas bases, que possuem n lados.

Portanto, $7200º = n \cdot S_4 + 2 \cdot S_n \Rightarrow 7\,200º = n\,(4 - 2)\,180º + 2 \cdot (n - 2)\,180º \Rightarrow n = 11$ lados. Se cada base é um polígono de 11 lados, teremos 22 vértices no prisma.

RESPOSTA: E

Em relação a um sistema de eixos cartesiano ortogonal no plano, três vértices de um tetraedro regular são dados por A = (0, 0), B = (2,2) e C = $\left(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right)$. O volume do tetraedro é

a) $\frac{8}{3}$.

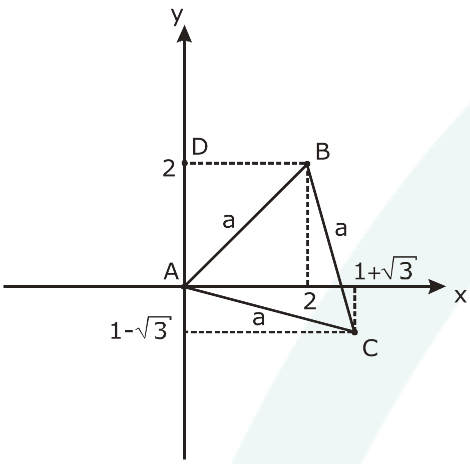
b) 3.

c) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

d) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

e) 8.

RESOLUÇÃO:



O tetraedro regular é um sólido que tem como faces 4 triângulos equiláteros. Uma dessas faces está representada anteriormente. As arestas deste tetraedro são iguais ao comprimento do segmento $\overline{AB}$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABD, temos: $a^2 = 2^2 + 2^2 \quad \Rightarrow \quad a = 2\sqrt{2}$

O volume de um tetraedro regular da aresta "a" é

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = \frac{8}{3}$$

GABARITO: Letra **A**

Matemática — Questão 11

No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio p(x) cujos coeficientes somam 32. Se 0 e -1 são raízes de p(x), então a soma a + b + c é igual a

a) $-\frac{1}{2}$.

b) $-\frac{1}{4}$.

c) $\frac{1}{2}$.

d) 1.

e) $\frac{3}{2}$.

RESOLUÇÃO:

$P(x) = (ax^2 - 2bx + c + 1)^5$

p (0) = p (-1) = 0, pois 0 é -1 são raízes e

p (1) = 32, pois os coeficientes de p (x) somam 32.

Substituindo, temos:

$$\begin{cases} c + 1 = 0 \\ (a+2b)^5 = 0 \\ (a-2b)^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} c = -1 \\ a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{matrix} \Rightarrow a + b + c = -\frac{1}{2}$$

GABARITO: Letra **A**

O menor inteiro positivo n para o qual a diferença $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ fica menor que 0,01 é

a) 2 499
b) 2 501
c) 2 500
d) 3 600
e) 4 900

RESOLUÇÃO:

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}<0,01$$
$$\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)^2<(0,01)^2$$
$$n+n-1-2\cdot\sqrt{n(n-1)}<0,0001$$
$$2\sqrt{n(n-1)}>n-\frac{1,0001}{2}$$
$$\cancel{n^2}-n>\cancel{n^2}-1,0001n+\frac{(1,0001)^2}{4}$$
$$0,0001n>\frac{1,0002}{4}(\text{aproximado})$$
$$n>\frac{10002}{4}$$
$$\boxed{n>2500,5}$$
o menor inteiro é 2501

GABARITO: Letra **B**

Matemática — Questão 13

Seja D = $\Re \setminus \{1\}$ e $f : D \to D$ uma função dada por $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

Considere as afirmações:

I. f é injetiva e sobrejetiva.

II. f é injetiva, mas não sobrejetiva.

III. $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, para todo $x \in D$, $x \neq 0$

IV. f(x) . f(-x) = 1, para todo $x \in D$.

Então são **VERDADEIRAS**

a) apenas I e III.

b) apenas I e IV.

c) apenas II e III.

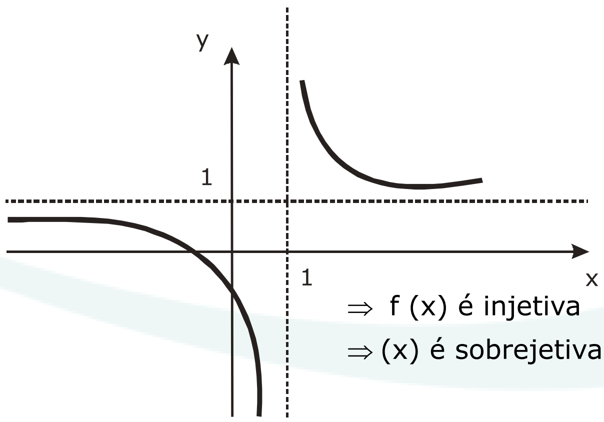
d) apenas I, III e IV.

e) apenas II, III e IV.

RESOLUÇÃO:

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f(x) = 1 + \frac{2}{x-1} \qquad f(x) = \frac{x+1}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$



$\Rightarrow$ f (x) é injetiva

$\Rightarrow$ (x) é sobrejetiva, pois =IR \ {1}

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1} = \frac{x+1}{x-1} = f(x)$$

$\Rightarrow f(x) + f\left(1/x\right), \quad \forall x \in D, x \neq 0$ e

$f(x) \cdot f(-x) = 1, \forall x \in D$ é falsa, pois

fazendo x = -1, temos f(x).f(-x)= 1 e f (1) não está definido.

GABARITO: Letra **A**

O número complexo 2 + i é raiz do polinômio $f(x) = x^4 + x^3 + px^2 + x + q$, com p, q $\in \Re$. Então, a alternativa que **MAIS** se aproxima da soma das raízes reais de f é

a) 4
b) -4
c) 6
d) 5
e) -5

RESOLUÇÃO:

2 + i é raiz e p, q, $\in \Re \Rightarrow$ 2 - i é raiz
$\Rightarrow$ f(x) é divisível por [x-(2+i)][x-(2-i)] = $x^2 - 4x + 5$

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3+px^2+x+q & x^2-4x+5 \\ \cline{2-2} & x^2+5x+(p+15) \end{array}$$

$$\underline{-x^4+4x^3-5x^2}$$

$$5x^3+(p-5)x^2+x$$
$$\underline{-5x^3+20x^2-25x}$$

$$(p+15)x^2-24x+q$$
$$\underline{-(p+15)x^2+4(p+15)x-5(p+15)}$$

$$(4p+36)x-5(p+15)+q$$

$\Rightarrow 4p+36=0 \Rightarrow p=-9$
$\Rightarrow f(x)=(x^2-4x+5)(x^2+5x+6)$

cujas raízes são 2+i, 2-i,-2 e -3
S = -2-3 = -5

GABARITO: Letra **E**

Matemática — Questão 15

Considere a equação em x, $a^{x+1} = b^{x/1}$, em que a e b são números reais positivos, tais que ln b = 2ln a > 0. A soma das soluções da equação é

A) 0 B) −1 C) 1 D) ln 2 E) 2

RESOLUÇÃO:

$\ln b = 2 \ln a > 0 \Rightarrow b > a > 1$

$\ln b = 2 \ln a \Rightarrow \ln b\ a^2 \Rightarrow \boxed{b = a^2}$

E, substituindo na equação, temos

$$a^{x+1} = \left(a^2\right)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow a^{x+1} = a^{\frac{2}{x}} \Rightarrow x + 1 = \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{-1}{1} \Rightarrow \boxed{S = -1}$$

GABARITO: Letra **B**

Matemática — Questão 16

O intervalo $I \subset \Re$ que contém todas as soluções da inequação $\arctan\frac{1+x}{2} + \arctan\frac{1-x}{2} \geq \frac{\pi}{6}$, é

a) [-1,4].   c) [-2,3].   e) [4,6].

b) [-3, 1].   d) [0,5].

RESOLUÇÃO:

Sejam α e β tais que :

$$\alpha = \text{arctg}\frac{1+x}{2} \Rightarrow \text{tg }\alpha = \frac{1+x}{2},\ \frac{-\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\beta = \text{arctg}\frac{1-x}{2} \Rightarrow \text{tg }\beta = \frac{1-x}{2},\ \frac{-\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$$

Assim, temos:

$$\alpha + \beta \geq \frac{\pi}{6} \text{ e} - \pi < \alpha + \beta < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq \alpha + \beta < \pi \Rightarrow$$

$$\text{tg}(\alpha+\beta), \text{temos}: \text{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha + \text{tg}\beta} = \frac{1}{1 - \frac{1-x^2}{4}} = \frac{4}{3+x^2}$$

$$\text{Logo devemos ter}: (\text{i})\frac{4}{3+x^2} < 0 \text{ ou } (\text{ii})\frac{4}{3+x^2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(\text{i})\frac{4}{3+x^2} < 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$$

E como $\sqrt{3}\left(3+x^2\right) > 0$ podemos multiplicar ambos os lados de (ii) por $\sqrt{3}\left(3+x^2\right)$.

Assim temos :

$$4\sqrt{3} \geq 3 + x^2 \Rightarrow x^2 - \left(4\sqrt{3} - 3\right) \leq 0 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{4\sqrt{3} - 3} \Rightarrow \boxed{|x| \leq 2} \Rightarrow \boxed{-2 \leq x \leq 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{-2 \leq x \leq 3}$$

GABARITO: Letra **C**

Seja $z \in C$ com $|z| = 1$. Então, a expressão $\left|\frac{1-\bar{z}\omega}{z-\omega}\right|$ assume valor

a) maior que 1, para todo ω com $|\omega| > 1$.

b) menor que 1, para todo ω com $|\omega| < 1$.

c) maior que 1, para todo ω com $\omega \neq z$.

d) igual a 1, independente de ω com $\omega \neq z$.

e) crescente para $|\omega|$ crescente, com $|\omega| < |z|$

RESOLUÇÃO:

$z \in C$, $|z| = 1 = |\bar{z}|$

$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$

$$\left|\frac{1-\bar{z}\omega}{z-\omega}\right| = \left|\frac{z.\bar{z}-\bar{z}\omega}{z-\omega}\right| = \left|\frac{\bar{z}(z-\omega)}{z-\omega}\right| = |\bar{z}| = 1, \forall \omega, \omega \neq z$$

GABARITO: Letra **D**

Matemática — Questão 18

O sistema linear $\begin{cases} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases}$, não admite solução se somente o número real b for igual a:

A) −1
B) 0
C) 1
D) 2
E) −2

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} bx + y = 1 \\ by + z = 1 \\ x + bz = 1 \end{cases}$$

Escalonando $(-b)\left[\begin{array}{ccc:c} b & 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b & 1 \end{array}\right] \overset{(-b)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & -b^2 & -b+1 \\ 0 & b & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b & 1 \end{array}\right]$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & -b^2 & -b+1 \\ 0 & 0 & b^3+1 & b^2-b+1 \\ 1 & 0 & b & 1 \end{array}\right]$$

O sistema é impossível, se e somente se, $b^3 + 1 = 0$ e $b^2 - b + 1 \neq 0$.
Isso ocorre para $b = -1$

GABARITO: Letra **A**

Retiram-se 3 bolas de uma urna que contém 4 bolas verdes, 5 bolas azuis e 7 bolas brancas. Se P_1 é a probabilidade de não sair bola azul e P_2 é a probabilidade de todas as bolas saírem com a mesma cor, então a alternativa que mais se aproxima de $P_1 + P_2$ é:

A) 0,21

B) 0,25

C) 0,28

D) 0,35

E) 0,40

RESOLUÇÃO:

$$P_1 = \frac{C_{11,3}}{C_{16,3}} = \frac{33}{112} \simeq 0,295$$

$$P_2 = \frac{C_{4,3} + C_{5,3} + C_{7,3}}{C_{16,3}} = \frac{7}{80} \simeq 0,087$$

$$P_1 + P_2 \simeq 0,383$$

GABARITO: Letra **E**

A distância focal e a excentricidade da elipse com centro na origem e que passa pelos pontos (1, 0) e (0, –2) são, respectivamente,

A) $\sqrt{3}$ e $\frac{1}{2}$

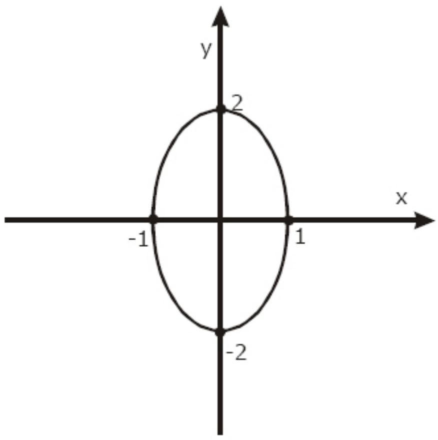
B) $\frac{1}{2}$ e $\sqrt{3}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{1}{2}$

D) $\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

E) $2\sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$

RESOLUÇÃO:



$a = 2,\ b = 1$

$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c = \sqrt{3}$

$2c = 2\sqrt{3}$ e $c/a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

GABARITO: Letra **E**

Seja a_1, a_2, ... uma progressão aritmética infinita tal que

$\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi n^2$, para $n \in N^*$

DETERMINE o primeiro termo e a razão da progressão.

RESOLUÇÃO:

$\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi n^2$, $n \in N^*$

fazendo n = 1 temos:

$a_3 = \sqrt{2} + \pi$

fazendo n = 2 temos:

$a_3 + a_6 = 2\sqrt{2} + 4\pi$

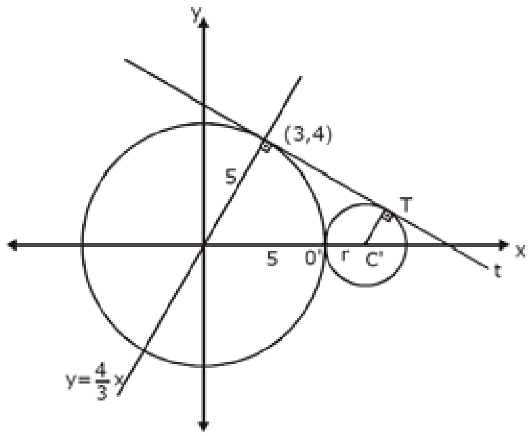
$\Rightarrow a_6 = \sqrt{2} + 3\pi$

então como $a_6 = a_3 + 3r$, onde r é a razão $\sqrt{2} + 3\pi = \sqrt{2} + \pi + 3r \Rightarrow r = \frac{2\pi}{3}$

e ainda $a1 = a3 - 2r \rightarrow a1 = \sqrt{2} + \pi - \frac{4\pi}{3} \Rightarrow a1 = \sqrt{2} - \frac{\pi}{3}$

Seja C a circunferência de centro na origem, passando pelo ponto P = (3, 4). Se t é a reta tangente a C por P, determine a circunferência C' de menor raio, com centro sobre o eixo x e tangente simultaneamente à reta t e à circunferência C.

RESOLUÇÃO:



(t): 3x + 4y – 25 = 0

C'O' = C'T

$$r = \left|\frac{[3.(5+r)+4.0-25]}{\sqrt{9+16}}\right|$$

$$|3r-10| = 5r$$

$$\left.\begin{array}{l}3r-10 = 5r\\ \quad \text{ou}\\ 3r-10=-5r\end{array}\right. \Rightarrow r = 5/4$$

$$C': \left(x-\frac{25}{4}\right)^2 + (y)^2 = \frac{25}{16}$$

Sejam A e B matizes de 2 X 2 tais que AB = BA e que satisfazem à equação matricial $A^2 + 2AB - B = 0$. Se B é inversível, mostre que

A) $AB^{-1} = B^{-1}A$ e que
B) A é inversível

RESOLUÇÃO:

A) $A = A \Rightarrow$
$AI = I.A \Rightarrow$
$A.(B.B^{-1}) = (B.B^{-1}).A \Rightarrow$
$(A.B).B^{-1} = B.B^{-1}.A \Rightarrow$
$(B.A).B^{-1} = B.B^{-1}.A$

Multiplicando-se por B^{-1} pela esquerda, vem:

$(B^{-1}.B).A.B^{-1} = (B^{-1}.B).B^{-1}.A$
$I.A.B^{-1} = I.B^{-1}.A$
$AB^{-1} = B^{-1}.A$

B) $A^2 + 2\ AB = B$
$A(A + 2B) = B$
$\det A \ .\ \det (A + 2B) = \det B$

E como B é inversível $\Rightarrow$ de t $B \neq 0$
$\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow$ A é inversível

Seja n o número de lados de um polígono convexo. Se a soma de n − 1 ângulos (internos) do polígono é 2004º, **DETERMINE** o número n de lados do polígono.

RESOLUÇÃO:

Como o polígono é convexo, cada ângulo interno é menor que 180º, e:

$2004º < S_i < 2184º$

$2004º < (n - 2) \cdot 180º < 2184º$

$2364º < 180º\, n < 2544º$

$13{,}13 < n < 14{,}13$

$n = 14$

O número de lados do polígono é 14.

Matemática — Questão 25

A) **MOSTRE** que o número real $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é raiz da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$.

B) Conclua de A que α é um número racional.

RESOLUÇÃO:

A) Seja $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ e $b = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

$$\alpha^3 = (a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

$$\alpha^3 = \left(2+\sqrt{5}\right) + 3.\sqrt[3]{-1}.(a+b) + \left(2-\sqrt{5}\right)$$

$$\alpha^3 = 4 - 3\alpha$$

$$\alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$$

B) $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$

1 é raiz e $\begin{array}{l|l} \alpha^2 + 3\alpha - 4 & \alpha - 1 \\ \hline \quad 0 & \alpha^2 + \alpha + 4 \end{array}$

$$\alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$$

$$(\alpha - 1)(\alpha^2 - \alpha + 4) = 0$$

$\alpha = 1$ ou $\alpha^2 - \alpha + 4 = 0$

$\Delta = -15$

2 raizes nao reais

E como $\alpha \in \mathbb{R}$

$\alpha = 1 \rightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$

Considere a equação em $x \in \mathbb{R}$

$\sqrt{1+mx} = x + \sqrt{1-mx}$

sendo m um parâmetro real.

A) **RESOLVA** a equação em função do parâmetro m.

B) **DETERMINE** todos os valores de m para os quais a equação admite solução não nula.

RESOLUÇÃO:

A) $\sqrt{1+mx} = x + \sqrt{1-mx}$, $m \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx} = x$$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$$1 + mx + 1 - mx - 2\sqrt{(1+mx)(1-mx)} = x^2$$

$$2 - 2\sqrt{1-m^2x^2} = x^2$$

$$2\sqrt{1-m^2x^2} = 2 - x^2$$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$$4\left(1-m^2x^2\right) = 4 - 4x^2 + x^4$$

$$x^4 + \left(4m^2 - 4\right)x^2 = 0$$

$$x^2\left(x^2 + 4m^2 - 4\right) = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x^2 = 4 - 4m^2 \Leftrightarrow x = \pm\, 2\sqrt{1-m^2}$$

B) para que tenhamos as soluções $x = \pm\, 2\sqrt{1-m^2}$ deveremos ter $\frac{\sqrt{2}}{2} \le m \le 1$.

Demonstração:

(i) $1 - m^2 \ge 0$

$$-1 \le m \le 1$$

(ii) se ≥ 0

$$\sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx} = x \ge 0$$

$$1 + mx \ge 1 - mx$$

$$2mx \ge 0 \rightarrow m \ge 0$$

se $x < 0$

$$\sqrt{1+mx} - \sqrt{1-mx} = x < 0$$

$$1 + mx < 1 - mx$$

$$2mx < 0 \rightarrow m > 0$$

(iii) $2 - x^2 \geq 0$

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

testanto a solução:

$$-\sqrt{2} \leq \pm 2\sqrt{1 - m^2} \leq \sqrt{2}$$

$$2\sqrt{1 - m^2} \leq \sqrt{2}$$

$$1 - m^2 \leq \frac{1}{2}$$

$$m \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } m \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(iv) $\left.\begin{array}{l} 1 + mx \geq 0 \Leftrightarrow mx \geq -1 \\ 1 - mx \geq 0 \Leftrightarrow mx \leq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow |mx| \geq 1$

testando a solução:

$$\left|m.\left(\pm 2\sqrt{1 - m^2}\right)\right| \leq 1$$

$$4m^2\left(1 - m^2\right) \leq 1$$

$$4m^4 - 4m^2 + 1 \geq 0$$

$$\left(2m^2 + 1\right)^2 \geq 0$$

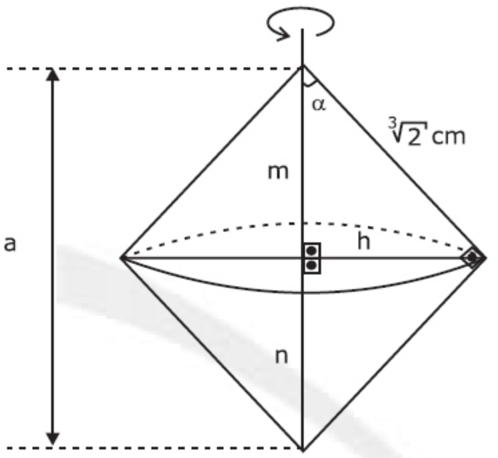
$$\forall m \in \mathbb{R}$$

De (i), (ii), (iii) e (iv) vem que

$$\sqrt{2} \leq m \leq 1$$

Um dos catetos de um triângulo retângulo mede $\sqrt[3]{2}$ cm. O volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa é π cm^3. **DETERMINE** os ângulos deste triângulo.

RESOLUÇÃO:



$V = \pi$

$\frac{\pi h^2 . a}{3}$

$h^2 . a = 3$

$n . m . a = 3$

$n . b^2 = 3$

$n . \sqrt[3]{4} = 3$

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 = \sqrt[3]{4} + a . n$

$a^2 = \sqrt[3]{4} + \frac{3}{\sqrt[3]{4}} . a$

$a^2 - \frac{3}{\sqrt[3]{4}} a - \sqrt[3]{4} = 0$

$a = \sqrt[3]{16}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 60^0$, pois α é agudo.

Os ângulos são 30º, 60º e 90º.

São dados dois cartões, sendo que um deles tem ambos os lados na cor vermelha, enquanto o outro tem um lado na cor vermelha e o outro lado na cor azul. Um dos cartões é escolhido ao acaso e colocado sobre uma mesa. Se a cor exposta é vermelha, **CALCULE** a probabilidade de o cartão escolhido ter a outra cor também vermelha.

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} 1^{\text{o}} \text{ cartão: face } v_1 \text{ e face } v_2. \\ 2^{\text{o}} \text{ cartão: face } v_3 \text{ e face a.} \end{cases}$$

A face exposta pode ser v_1 ou v_2 ou v_3.

$\Omega = \{v_1, v_2, v_3\}$

Para que a outra face seja vermelha, a face exposta tem que ser v_1 ou v_2.

$E = \{v_1, v_2\}$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{2}{3}$$

$$P = \frac{2}{3}$$

Matemática — Questão 29

Obtenha os pares (x, y), com x, y $\in [0,2\pi]$, tais que

$\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y) = \frac{1}{2}$

$\text{sen}\, x + \cos y = 1$

RESOLUÇÃO:

Fatorando-se a 1º equação tem-se:

$$\begin{cases} 2\,\text{sen}\, x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \\ \text{sen}\, x + \cos y = 1 \rightarrow \cos y = 1 - \text{sen}\, x \end{cases}$$

$2 \cdot \text{sen}\, x \cdot (1 - \text{sen}\, x) = \frac{1}{2}$

$4\,\text{sen}^2 x - 4\,\text{sen}\, x + 1 = 0$

$$\text{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6}$$

$$\cos y = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3}$$

$$S = \left\{\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{3}\right)\right\}$$

DETERMINE todos os valores reais de α para os quais a equação

$$(x - 1)^2 = |x - a|$$

admita exatamente três soluções distintas.

RESOLUÇÃO:

$(x - 1)^2 = |x - a|$

(i) Se $x - a \geq 0$

$(x - 1)^2 = x - a \Rightarrow x^2 - x + 1 = x - a \Rightarrow x^2 - 3x + a + 1 = 0$

$\Delta_1 = 9 - 4a - 4 = 5 - 4a \Rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5-4a}}{2}$

(ii) Se $x - a < 0$

$(x - 1)^2 = a - x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 - a = 0$

$\Delta_2 = 1 - 4 + 4a = 4a - 3 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$

Três serão os casos com possibilidade de resposta:

1º caso:

$\Delta_1 > 0$ e $\Delta_2 = 0$

$5 - 4a > 0 \Rightarrow a < \dfrac{5}{4} \wedge 4a - 3 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow a = \dfrac{3}{4}$ $\qquad S = \left\{\dfrac{3 \pm \sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}\right\}$

É importante notar que $\dfrac{3 \pm \sqrt{2}}{2} \geq \dfrac{3}{4}$ e $\dfrac{1}{2} < \dfrac{3}{4}$

2º caso:

$\Delta_1 = 0$ e $\Delta_2 > 0$

$a = \dfrac{5}{4} \wedge a > \dfrac{3}{4} \Rightarrow a = \dfrac{5}{4} \Rightarrow S\left\{\dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2}, \dfrac{3}{2}\right\}$

Note que $\dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2} < \dfrac{5}{4}$ e $\dfrac{3}{2} > \dfrac{5}{4}$

3º caso:

$\Delta_1 > 0$ e $\Delta_2 > 0$ e há raízes comuns nos casos (i) e (ii)

$$\frac{3}{4} < a < \frac{5}{4} \wedge \frac{3 \pm \sqrt{5-4a}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$$

$$\left(2 \pm \sqrt{5-4a}\right)^2 = \left(\pm\sqrt{4a-3}\right)^2$$

$$4 \pm 4\sqrt{5-4a} + 5 - 4a = 4a - 3$$

$$\left(\pm\sqrt{5-4a}\right)^2 = (2a-3)^2 \Rightarrow 5 - 4a = 4a^2 - 12a + 9$$

$$4a^2 - 8a + 4 = 0 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$S = \{0, 1, 2\}$$

Portanto os valores de a pedidos são 1, $\dfrac{3}{4}$ e $\dfrac{5}{4}$.