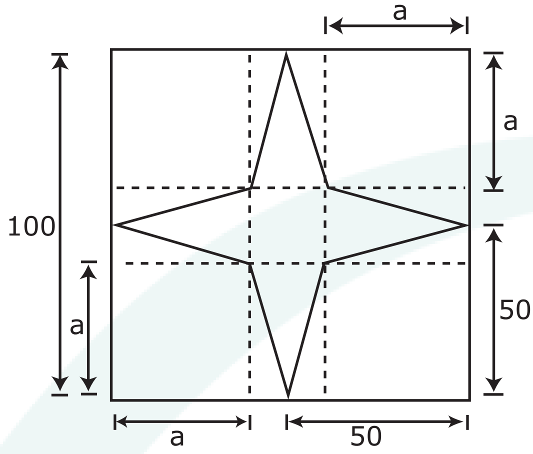
MATEMÁTICA

Matemática — Questão 01

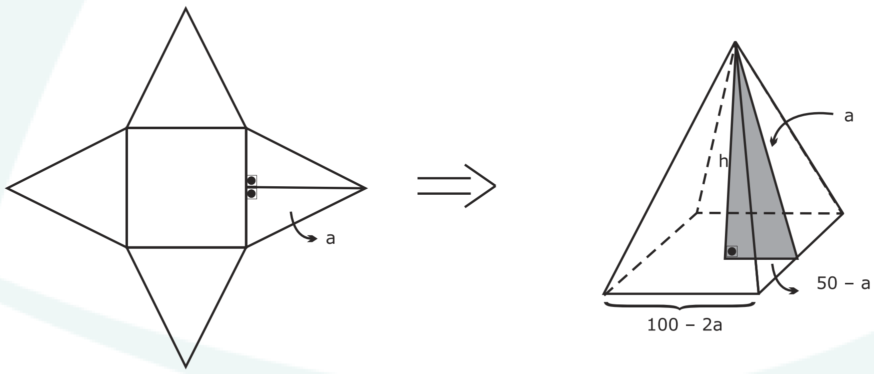
Uma pirâmide de base quadrada é construída recortando-se e dobrando-se uma cartolina quadrada de 100 cm de lado, como mostrado nesta figura:



Considerando essas informações,

1. **DETERMINE** a altura da pirâmide em função de a.
2. **DETERMINE** o volume da pirâmide em função de a.
3. **DETERMINE** os valores de a para os quais se pode construir uma pirâmide da maneira descrita.

RESOLUÇÃO:



1. $h^2 + (50 - a)^2 = a^2$

$\boxed{h = 10\sqrt{a - 25}\,\text{cm}}$

2. $V_{pir} = \frac{1}{3} A_B \cdot H$

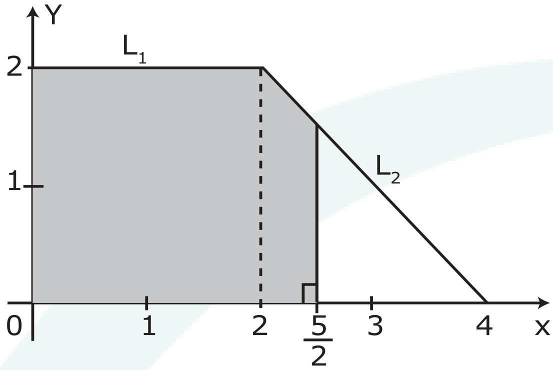
$\boxed{V = \frac{10}{3}(100 - 2a)^2\,\sqrt{a - 25}\ \text{cm}^3}$

3.

$$\begin{cases} a - 25 > 0 \\ \quad\text{e} \\ 100 - 2a > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{25\,\text{cm} < a < 50\,\text{cm}}$$

(Constituída de três itens.)

Observe esta figura:

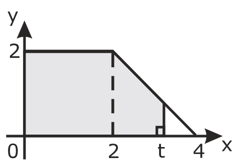


Nessa figura, L_1 e L_2 são segmentos de reta que ligam os pontos (0,2), (2,2) e (4,0).
Uma função $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ é definida associando-se a cada $t \in [0,4]$ o valor da área da região limitada pelas retas $x = 0$, $x = t$, $y = 0$ e a poligonal formada pelos segmentos L_1 e L_2 .
Por exemplo, o valor de $f\left(\frac{5}{2}\right)$ é a área da região sombreada na figura.

Considerando essas informações,

1. **DETERMINE** os valores de f (1) e f (3).
2. **DETERMINE** as expressões de f (t) para $0 \le t \le 2$ e para $2 < t \le 4$.
3. **ESBOCE** o gráfico da função f (t).

RESOLUÇÃO :

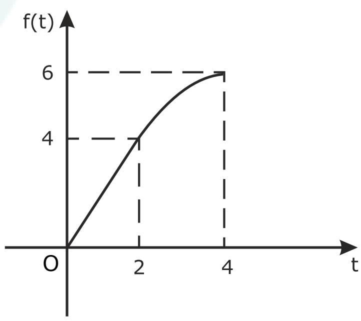


1. f(1) = 2
   f(3) = 11/2

2. f(t) = 2t, $0 \le t \le 2$

$$f(t) = -\frac{t^2}{2} + 4t - 2 = 4 + \frac{(6-t)(t-2)}{2}, \text{ se } 2 < t \le 4$$

3.



Sejam C_1 e C_2 circunferências de, respectivamente, centros O_1 e O_2 e raios r_1 e r_2 .
A equação de C_1 é $x^2 + y^2 - 10\,y + 15 = 0$ e a equação de C_2 é $x^2 + y^2 + 20\,x + 15 = 0$.
Sejam A e B os pontos de interseção de C_1 e C_2.

Considerando essas informações,

1. **DETERMINE** as coordenadas de O_1 e O_2 e os raios r_1 e r_2.
2. **DETERMINE** as coordenadas de A e B.
3. **CALCULE** a área do quadrilátero AO_1BO_2.

RESOLUÇÃO:

1. $C_1 : x^2 + y^2 - 10y + 15 = 0 \begin{cases} O_1\,(0,5) \\ R_1 = \sqrt{10} \end{cases}$

$C_2 : x^2 + y^2 + 20x + 15 = 0 \begin{cases} O_2\,(-10,0) \\ R_2 = \sqrt{85} \end{cases}$

2. Interseções

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10y + 15 = 0 \ (C_1) \\ x^2 + y^2 + 20x + 15 = 0 \ (C_2) \end{cases}$$

De C_1 e C_2:

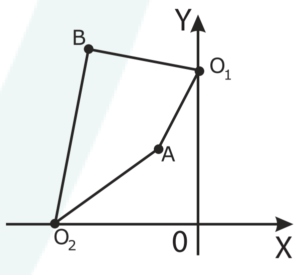
$-10y=20x \Rightarrow y=-2x$

Substituindo em C_2:

$$x^2 + 4x^2 + 20x + 15 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x' = -1 \\ x'' = -3 \end{matrix}$$

$\boxed{A(-1,2) \text{ e } B(-3,6)}$

3.



$$A = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccccc} O_2 & B & O_1 & A & O_2 \\ -10 & -3 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 6 & 5 & 2 & 0 \end{array} \right\|$$

$\boxed{A = 25}$

Seja $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ um polinômio em que a e b são números inteiros.

Sabe-se que $1+\sqrt{2}$ é uma raiz de p(x).
Considerando essas informações,
1. **DETERMINE** os coeficientes a e b.
2. **DETERMINE** todas as raízes de p(x).

RESOLUÇÃO:
$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$, a e b inteiros.

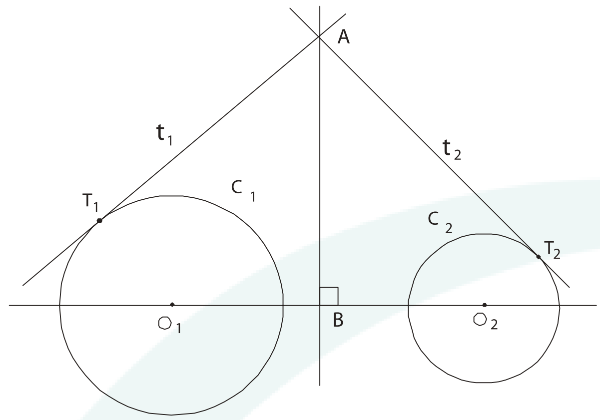
1. $\left(1+\sqrt{2}\right)^3 + a\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + b\left(1+\sqrt{2}\right) + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a=-4}$ e $\boxed{b=3}$

2. Como $1+\sqrt{2}$ é raiz e os coeficientes são inteiros, então $1-\sqrt{2}$ também é raiz.
   Soma das raízes = -a = 4

$1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+k=4 \Rightarrow k=2$

As raízes são $\boxed{1+\sqrt{2},\,1-\sqrt{2}\text{ e }2}$

Observe esta figura:



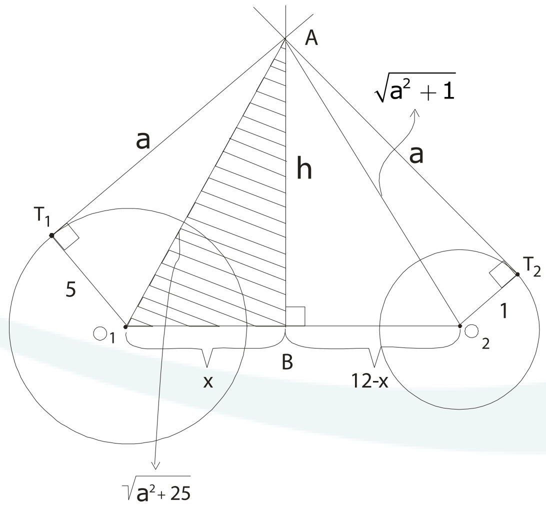
Nessa figura, as retas t_1 e t_2 são tangentes às circunferências C_1 e C_2 , respectivamente, nos pontos T_1 e T_2 . A reta AB é perpendicular à reta que passa pelos centros O_1 e O_2 das circunferências.

Sabe-se, também, que

$\overline{AT_1} = \overline{AT_2}$; o raio de C_1 é 5 e o raio de C_2 é 1; e $O_1O_2 = 12$

Assim sendo, **CALCULE** $\overline{O_1B}$ e $\overline{O_2B}$

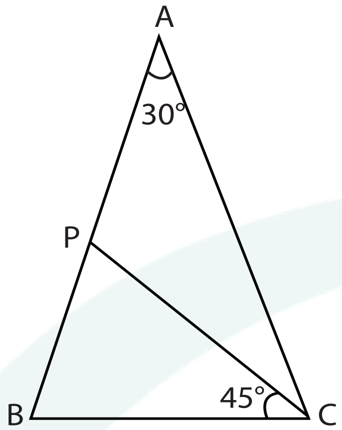
RESOLUÇÃO:



$h^2 = a^2 + 25 - x^2 = a^2 + 1 - (12-x)^2 \Rightarrow x=7$
(duas vezes o teorema de Pitágoras)

$\boxed{O_1B = 7}$ $\boxed{O_2B = 5}$

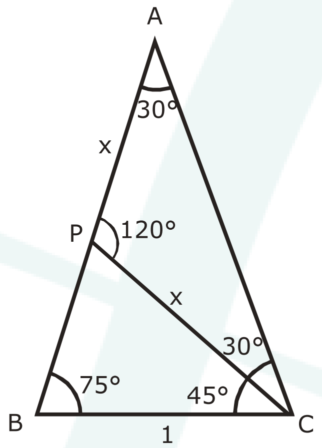
Observe esta figura:



Nessa figura, os comprimentos dos segmentos AB e AC são iguais. O comprimento do segmento BC é 1. Considerando essas informações,

1. **CALCULE** o comprimento do segmento CP.
2. **CALCULE** a área do triângulo ACP.

RESOLUÇÃO:



1. Lei dos senos

$$\frac{x}{\text{sen}75^\circ} = \frac{1}{\text{sen}60^\circ}$$

$$x = \frac{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{6}\left(3+\sqrt{3}\right)}$$

2. $A_{\Delta APC} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot \text{sen}120^\circ \Rightarrow \boxed{A = \frac{2\sqrt{3}+3}{12}}$

DETERMINE todos os números complexos que satisfazem estas condições:

$$\begin{cases} |z+3| - 2\bar{z} = 3+6i \\ |z| < 4 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO:

$$\begin{cases} |z+3| - 2\bar{z} = 3+6i \\ |z| < 4 \end{cases} \overset{z=a+bi}{\Rightarrow} \quad |(a+3)+bi| - 2(a-bi) = 3+6i$$

$$\sqrt{(a+3)^2 + b^2} = (3+2a) + (6-2b)i$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 6-2b = 0 \Rightarrow b = 3 \\ \sqrt{(a+3)^2+b^2} = 3+2a \Rightarrow \; a' = -3\left(\text{ não serve, pois} |z| < 4\right) \end{cases}$$

ou

$$\boxed{a'' = 1}$$

$$\boxed{z = 1+3i}$$

Para um grupo de 12 pessoas, serão sorteadas viagens para três cidades distintas A, B e C. Cinco dessas pessoas irão para a cidade A; quatro, para a cidade B; e três, para cidade C.

Nesse grupo, estão Adriana, Luciana e Sílvio, que são amigos e gostariam de ir para a mesma cidade. Considerando essas informações, **RESPONDA**:

1. De quantas maneiras distintas se podem sortear as viagens de modo que Adriana, Luciana e Sílvio viajem para a cidade A?
2. De quantas maneiras distintas se podem sortear as viagens de modo que Adriana, Luciana e Sílvio viajem para a mesma cidade?
3. Qual é a probabilidade de Adriana, Luciana e Sílvio viajarem para a mesma cidade?

RESOLUÇÃO:

1. $C_{9,2} \cdot C_{7,4} \cdot C_{3,3} = 1260$
2. para A: 1260

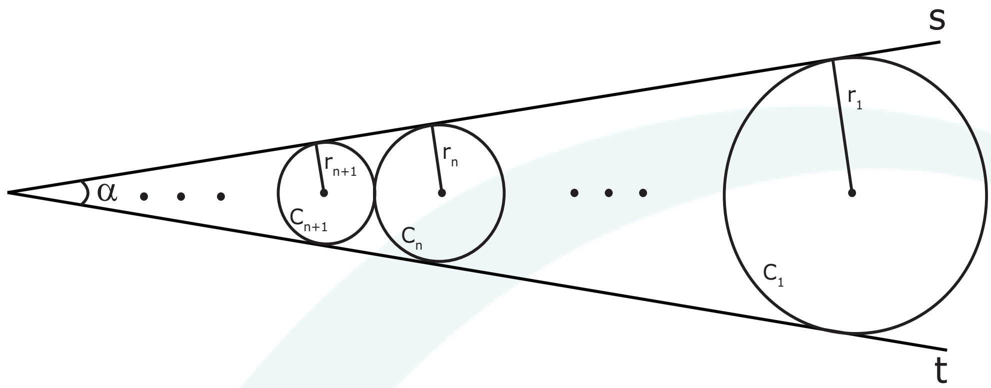
   para B: $C_{9,5} \cdot C_{4,1} \cdot C_{3,3} = 504$

   para C: $C_{9,5} \cdot C_{4,4} = 126$

   soma: 1890

3. $P = \dfrac{1890}{C_{12,5} \cdot C_{7,4} \cdot C_{3,3}} = \dfrac{3}{44}$

Observe esta figura:



Nessa figura, está representada uma sequência infinita de círculos C_1, C_2, C_3, ..., que tangenciam as retas s e t. Cada círculo C_n tangencia o próximo círculo C_{n+1}. Para todo número natural positivo n, r_n é o raio do círculo C_n.

Sabe-se que:

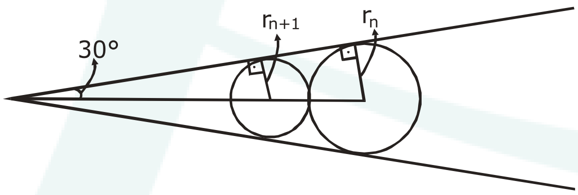
- $\alpha = 60°$;
- $r_1 = 1$.

Considerando essas informações,

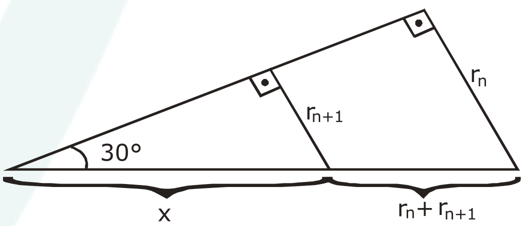
1. **MOSTRE** que $\dfrac{r_{n+1}}{r_n} = \dfrac{1}{3}$ para todo n.

2. **DETERMINE** r_n em função de n.
3. **CALCULE** a soma das áreas de todos os círculos C_1, C_2, C_3, ...

RESOLUÇÃO:



1.



$$\text{sen}30^\circ = \frac{r_{n+1}}{x} = \frac{r_n}{x + r_n + r_{n+1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2r_{n+1} \\ \text{e} \\ x + r_n + r_{n+1} = 2r_n \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1}{3}}$$

$$2 \cdot r_{k+1} = \frac{1}{3} r_k$$

$$r_1 = 1$$

$$r_2 = \frac{1}{3}$$

$$r_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 .... \boxed{r_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$$

3. Soma $= \pi\left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots\right) \Rightarrow S = \pi\left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \ldots\right] = \pi \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9\pi}{8}$