MATEMÁTICA

Matemática – Questão 01

Sejam $a_1 = 1 - i$, $a_n = r + si$ e $a_{n+1} = (r - s) + (r + s)i$ $(n > 1)$ termos de uma sequência. **DETERMINE**, em função de *n*, os valores de r e s que tornam esta sequência uma progressão aritmética, sabendo que *r* e *s* são números reais e $i = \sqrt{-1}$.

RESOLUÇÃO:

$a_{n+1} - a_n = (r - s) + (r + s)\,i - r - si$

$a_{n+1} - a_n = -s + r\,i$

Razão $= R = -s + r\,i$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot R$

$r + si = 1 - i + (n - 1)(-s + r\,i)$

$r + si = 1 + s - ns + (nr - r - 1)\,i$

$$\begin{cases} r = 1 + s - ns \\ s = nr - r - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r + (n-1)\cdot s = 1 \\ (1-n)\cdot r + s = -1 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & n-1 \\ 1-n & 1 \end{vmatrix} = n^2 - 2n + 2$$

$$D_r = \begin{vmatrix} 1 & n-1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = n$$

$$D_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-n & -1 \end{vmatrix} = n - 2$$

$$r = \frac{D_r}{D}, s = \frac{D_s}{D}$$

$$\boxed{r = \frac{n}{n^2 - 2n + 2}, s = \frac{n-2}{n^2 - 2n + 2}, n \in N e n > 1}$$

Considere o polinômio
$p(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 27x^2 - 44x + 30$

Sabendo que o produto de duas de suas raízes complexas é igual a 3 – i e que as partes reais e imaginárias de todas as suas raízes complexas são inteiras e não nulas, **CALCULE** todas as raízes do polinômio.

RESOLUÇÃO:

$x_1 = a + bi, \quad x_2 = c + di$

$\overline{x_1} = a - bi, \quad \overline{x_2} = c - di$ e x_3

são raízes do polinômio.

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 3 + i \\ \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} = 3 - i \end{cases}$$

Por Girard, temos que:

$x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 = -30$

Por Briot Ruffini:

-3	1	-3	-3	27	-44	30
	1	-6	15	-18	10	0

$x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10 = 0$

Por Girard, tem-se:

$S = (a + bi) + (a - bi) + (c + di) + (c - di) = 6$

(i) $a + c = 3$

$P_{3,3} = (3 + i) \cdot (a - bi + c - di) + (3 - i)(a + bi + c + di) = 18$

$3(a + c) + b + d = 9$ e como $a + c = 3$,

(ii) $b + d = 0$

Do enunciado, sabe-se que

$(a + bi)(c + di) = 3 - i$

$(ac - bd) + (bc + ad)i = 3 - i$

(iii) $ac - bd = 3$

(iv) $bc + ad = -1$

De (i), (ii), (iii) e (iv):

$$\begin{cases} a + c = 3 \\ b + d = 0 \\ ac - bd = 3 \\ bc + ad = -1 \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema, tem-se

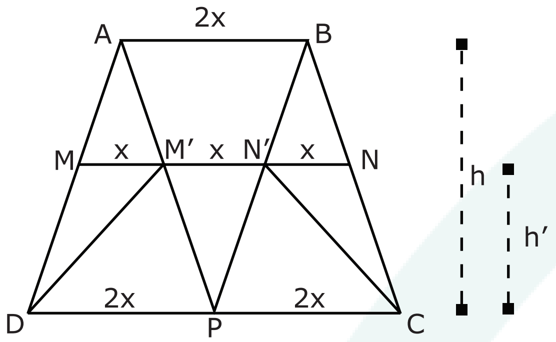
$a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, $d = -1$

Logo, as raízes são

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 2 + i \\ x_2 = 1 - i \\ \overline{x_1} = 2 - i \\ \overline{x_2} = 1 + i \\ x_3 = -3 \end{array}}$$

Um trapézio ABCD, de base menor AB e base maior CD, possui base média MN. Os pontos M’ e N’ dividem a base média em três segmentos iguais, na ordem MM’N’N. Ao se traçar as retas AM’ e BN’, verificou-se que as mesmas se encontraram sobre o lado CD no ponto P. **CALCULE** a área do trapézio M’N’CD em função da área de ABCD.

RESOLUÇÃO:



Os pontos M´e N´ dividem a base média em 3 segmentos iguais a x.

O segmento MM´é base média do triângulo ADP, portanto DP = 2x.

O segmento N´N é base média do triângulo BCP, portanto PC = 2x.

O segmento MN é base média do trapézio ABCD, portanto:

MN = (AB + CD) /2 $\Rightarrow$ 3x = (AB + 4x)/2 $\Rightarrow$ AB = 2x

Sendo h a altura do trapézio ABCD, teremos a altura do trapézio M´N´CD: $\Rightarrow$

h´= h/2.

Assim, a área do trapézio ABCD será

S_{ABCD} = (AB + CD).h/2 = (2x+4x).h/2 => S_{ABCD} = 3xh

E a área do trapézio M´N´CD será:

$S_{M´N´CD}$ = (M´N´+ CD)h´/2 = (x+4x)/2 . h/2 = 5xh/4 = (5/12). 3xh

De onde se conclui que

$\boxed{S_{M'N'CD} = (5/12) \cdot S_{ABCD}}$

Seja $D_n = \det(A_n)$, em que

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

DETERMINE D_n em função de n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$).

RESOLUÇÃO:

$D_n = n + 1$

Vamos demonstrar por P.I.F.

(I) $n = 1 \Rightarrow D_1 = |2|$

$D_1 = 2$

(II) hipótese: $D_K = K + 1$

tese: $D^{K+1} = K + 2$

$$D_{k+1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{bmatrix}_{(k+1) \times (k+1)}$$

Somando-se todas as colunas e colocando-se no lugar da primeira coluna, obtém-se

$$D_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Aplicando-se Laplace na 1ª coluna, tem-se

$$D_{k+1} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot D_k + 1 \cdot (-1)_{k+1+1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{\text{matriz triangular}}$$

$$D_{k+1} = D_k + (-1)^{K+2} \cdot (-1)^K$$

$$D_{k+1} = D_k + (-1)^{2K+2}$$

$$D_{k+1} = D_k + 1$$

$$D_{k+1} = (k+1) + 1$$

$$D_{k+1} = K + 2 \quad c \cdot q \cdot d$$

DETERMINE os valores de x, y, z e r que satisfazem o sistema

$C^{y}_{r+y} = \log_y x$

$\log_y z = 4 + \log_x z$

$C^{y}_{r+y} = \log_x z + \log_z z$

Em que C^{p}_{m} representa a combinação de m elementos tomados *p* a p e $\log_c B$ representa o logaritmo de *B* na base *c*.

RESOLUÇÃO:

CE: $x > 0$ e $x \neq 1$, $z > 0$ e $z \neq 1$, $y \in \mathbb{N}^*$ e $y \neq 1$, $r \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} \dfrac{(r+y)!}{r!y!} = \log_y x & (\mathrm{I}) \\ \log_y z = 4 + \log_x z & (\mathrm{II}) \\ \dfrac{(r+y)!}{r!y!} = \log_x z + 1 & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

Comparando (I) e (III), temos

$$\log_y x = \log_x z + 1 \qquad (\mathrm{IV})$$

Fazendo (II) – (IV), temos

$$\log_y \left(z/x\right) = 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{z}{x} = y^3 \qquad (\mathrm{V})$$

Substituindo (V) em (IV), obtemos

$$\log_y x = \log_x xy^3 + 1$$

$$\log_y x = 1 + 3\log_x y + 1$$

$$\log_y x = 1 + \frac{3}{\log_y x} + 1$$

$$(\log_y x)^2 - 2(\log_y x) - 3 = 0$$

$$\log_y x = 3 \qquad \text{ou} \qquad \log_y x = -1$$

$\boxed{x = y^3}$ (VI) $\qquad x = y^{-1}$ (F) pois x e y são inteiros e x, $y \neq \pm 1$.

Substituindo (VI) em (I):

$$\log_y y^3 = \frac{(r+y)!}{r!y!} \quad \Rightarrow \quad \frac{(r+y)!}{r!y!} = 3$$

Note, na igualdade anterior, que a fração no primeiro membro é um termo do triângulo de Pascal, e este só apresenta o valor "3" em duas posições:

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Como $y \neq 1$, temos então que:

$$\boxed{y = 2,\ r = 1 \ \text{ e } \ x = 8,\ z = 64}$$

Os ângulos de um triângulo estão em progressão aritmética e um deles é solução da equação trigonométrica

$$(\text{sen } x + \cos x)\,(\text{sen}^2 x - \text{senx}\cos x + \cos^2 x) = 1$$

DETERMINE os valores destes ângulos (em radianos).

RESOLUÇÃO:

$$(\text{senx} + \cos x)(1 - \text{senx}\cos x) = 1$$
$$(\text{senx} + \cos x)^2\,(1 - \text{senx}\cos x)^2 = 1$$
$$(\text{sen}^2 x + \cos^2 x + 2\text{senx}\cos x)(1 - 2\text{senx}\cos x + \text{sen}^2 x\cos^2 x) = 1$$

$$(1 + \text{sen}2x)\left(1 - \text{sen}2x + \frac{\text{sen}^2 2x}{4}\right) = 1$$

$$\cancel{1} - \cancel{\text{sen}2x} + \frac{\text{sen}^2 2x}{4} + \cancel{\text{sen}2x} - \text{sen}^2 2x + \frac{\text{sen}^3 2x}{4} = \cancel{1}$$

$$\text{sen}^2 2x\left(\frac{\text{sen}2x}{4} - \frac{3}{4}\right) = 0$$

Hipótese 1:

$$\frac{\text{sen}2x}{4} - \frac{3}{4} = 0$$
$$\Rightarrow \text{sen}2x = 3 \quad (\text{Falso})$$

Hipótese 2:

$$\text{sen}^2 2x = 0$$
$$\Rightarrow \text{sen}2x = 0$$
$$2x = 0 \quad \text{ou} \quad 2x = \pi$$

$$x = 0\,(\text{falso}) \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

Os ângulos do triângulo são:

$$\left(\frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \text{e} \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$$

E fazendo a soma temos

$$\cancel{\frac{\pi}{2}} + \cancel{\frac{\pi}{2}} - \alpha + \frac{\pi}{2} - 2\alpha = \cancel{\pi}$$

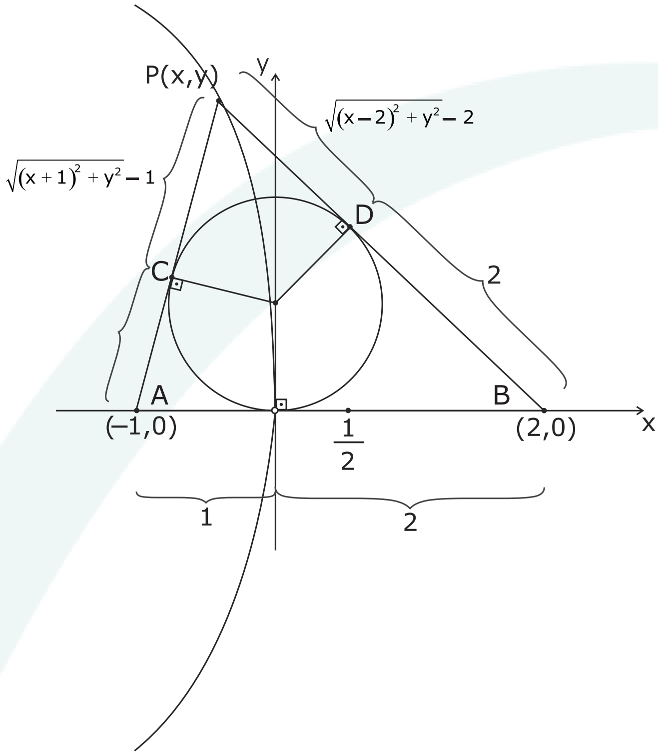
$$3\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{6}}$$

Substituindo, temos os valores dos ângulos dados por

$$\boxed{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3} \text{ e } \frac{\pi}{6}}$$

Matemática – Questão 07

Considere os pontos A(–1, 0) e B(2, 0) e seja C uma circunferência de raio R tangente ao eixo das abscissas na origem. A reta r_1 é tangente a C e contém o ponto A e a reta r_2 também é tangente a C e contém o ponto B. Sabendo que a origem não pertence às retas r_1 e r_2, **DETERMINE** a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto de interseção de r_1 e r_2 ao se variar R no intervalo (0, ∞).



Da figura PD = PC

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2}-2=\sqrt{(x+1)^2+y^2}-1$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$x^2-4x+4+y^2=x^2+2x+1+y^2+1+2\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

$$2\sqrt{(x+1)^2+y^2}=-6x+2$$

Dividindo por 2 e elevando ambos os membros ao quadrado temos:

$$(x+1)^2+y^2=(-3x+1)^2$$

$$x^2+2x+1+y^2=9x^2-6x+1$$

$$8x^2-8x=y^2$$

$$x^2-x=\frac{y^2}{8}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\frac{y^2}{8}$$

$\boxed{\dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}-\dfrac{y^2}{2}=1}$ ⇒ Analisando a figura, vemos que só é válido o ramo esquerdo da hipérbole com exceção do ponto (0, 0).

Logo, o lugar geométrico pedido é um ramo de hipérbole de semieixo real

$a = \frac{1}{2}$, semieixo imaginário $b = \sqrt{2}$ e centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, excluindo a origem (pois raio $\neq 0$).

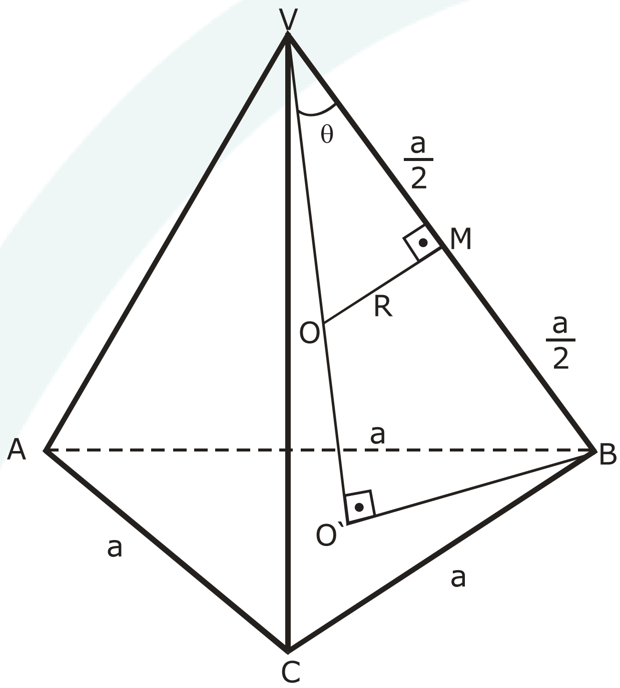
Considere um tetraedro regular de arestas *a* de comprimento *a* e uma esfera de raio *R* tangente a todas as arestas do tetraedro. Em função de *a*, **CALCULE**:

a) o volume total da esfera

b) o volume da parte da esfera situada no interior do tetraedro.

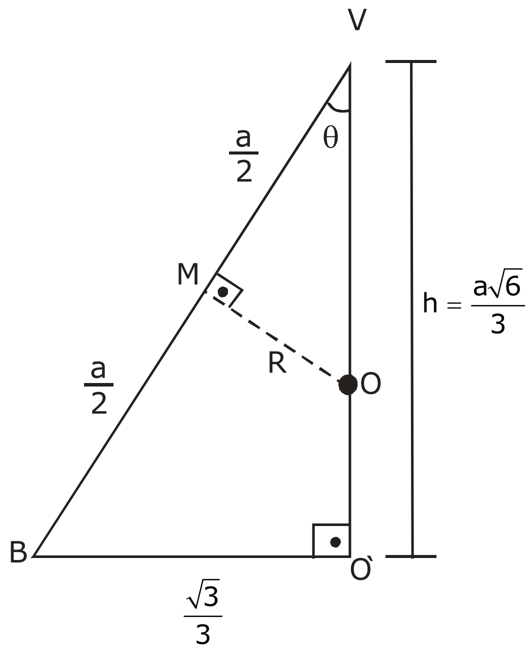
RESOLUÇÃO:

A)



O centro O da esfera, o centro O' do triângulo equilátero ABC e o vértice V do tetraedro regular estão sobre a altura do tetraedro. A distância do centro O a qualquer uma das arestas é R e o ponto de tangência divide a aresta ao meio.

A distância do centro O' do triângulo equilátero ao vértice B é $BO' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ e a altura do tetraedro regular é $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$



Os triângulos OVM e BVO’ são semelhantes, pois têm dois ângulos iguais. Portanto,

$$\frac{R}{\frac{a}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{\frac{a\sqrt{6}}{3}} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

O volume da esfera será

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{a^3\sqrt{2^3}}{4^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{24}}$$

b) Aplicando Pitágoras no triângulo VOM, temos

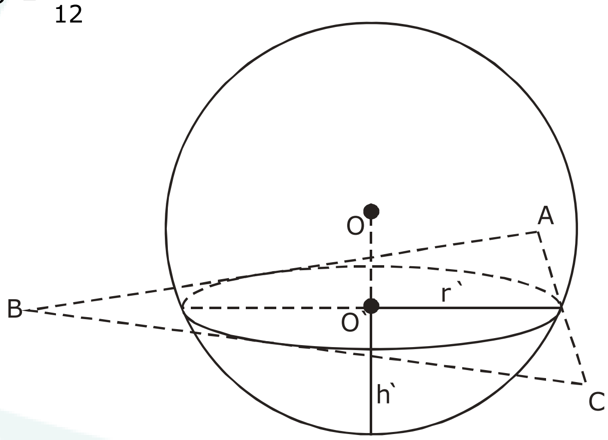
$$(VO)^2 = R^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$(VO)^2 = \frac{a^2 \cdot 2}{16} + \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{8} \Rightarrow VO = \frac{\sqrt{3}\cdot a}{\sqrt{8}}$$

$$VO = \frac{\sqrt{3}\cdot a}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow VO = \frac{\sqrt{6}\cdot a}{4}$$

A distância OO' será

$$OO' = h - VO = \frac{a\sqrt{6}}{3} - \frac{a\sqrt{6}}{4} \Rightarrow OO' = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$



A distância r’ do centro O’ do triângulo equilátero ao lado AC é $r' = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

E $h' = R - OO' = \frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a\sqrt{6}}{12}$

O volume da calota esférica é

$$V_c = \frac{\pi h'}{6}\left(3r'^2 + h'^2\right)$$

$$\Rightarrow V_c = \frac{\pi}{6}\left(\frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a\sqrt{6}}{12}\right)\left[3\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4} - \frac{a\sqrt{6}}{12}\right)^2\right]$$

$$\Rightarrow V_c = \frac{a\pi\sqrt{2}}{72}\left(3 - \sqrt{3}\right)\left[\frac{5a^2}{12} - \frac{a^2\sqrt{3}}{12}\right]$$

O volume no interior do tetraedro é o volume da esfera menos os volumes das quatro calotas.

$$V_I = V - 4V_c = \frac{\pi a^3\sqrt{2}}{24} - \frac{\sqrt{2}\pi a^3\left(3 - 3\sqrt{3}\right)\left(5 - \sqrt{3}\right)}{18 \cdot 12}$$

$$= \frac{9\pi a^3 - \sqrt{2} - 18\pi a^3\sqrt{2} + 8\pi a^3\sqrt{6}}{216}$$

$$= \frac{8\pi a^3\sqrt{6} - 9\pi a^3\sqrt{2}}{216} = \boxed{\frac{\pi a^3\left(8\sqrt{6} - 9\sqrt{2}\right)}{216}}$$

DETERMINE o conjunto solução S = {(x, y)|x $\wedge \in \mathbb{Z}$} da equação (x + y) k = xy sabendo que *k* é um número primo.

RESOLUÇÃO:

$(x+y)\cdot k = xy$

$kx + ky = xy$

$x(k-y) + ky = 0$

$x = \dfrac{ky}{y-k}$

$x = \dfrac{ky-k^2}{y-k} + \dfrac{k^2}{y-k}$

$(i)\ \boxed{x = k + \dfrac{k^2}{y-k}}, y \neq k.$

Como k é primo e x é inteiro, então $\dfrac{k^2}{y-k}$ é inteiro e y − k é divisor de k^2.

Assim,

$y - k = \pm 1 \Rightarrow \boxed{y_1 = k \pm 1}$

ou

$y - k = \pm k \Rightarrow \boxed{y_2 = 2k \text{ ou } y'_2 = 0}$

ou

$y - k = \pm k^2 \Rightarrow \boxed{y_3 = \pm k^2 + k}$

Substituindo esses valores na igualdade (i), obtemos

$x_1 = \pm k^2 + k$, $x_2 = 2k$, $x'_2 = 0$ e $x_3 = k \pm 1$. Então, o conjunto solução é

$$S = \begin{cases} (k^2 + k,\ k+1) \text{ e } (-k^2 + k,\ k-1), \\ (0,\ 0),\ (k \pm 1,\ \pm k^2 + k) \end{cases}$$

Sejam as somas S_0 e S_1 definidas por

$$S_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \cdots + C_n^{3[n/3]}$$

$$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \cdots + C_n^{3[(n-1)/3]+1}$$

CALCULE os valores de S_0 e S_1 em função de n, sabendo que [r] representa o maior inteiro menor ou igual ao número r.

Sugestão: utilize o desenvolvimento em binômio de Newton de $\left(1 + \text{cis}\,\frac{2\pi}{3}\right)^n$.

RESOLUÇÃO:

Sejam

$$S_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots + C_n^{3\left[\frac{n}{3}\right]}$$

$$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \ldots + C_n^{3\left[\frac{(n-1)}{3}\right]+1}$$

$$S_2 = C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + C_n^{11} + \ldots + C_n^{3\left[\frac{(n-2)}{3}\right]+2}$$

Usando a Sugestão:

$$\left(1 + \text{cis}\,\frac{2\pi}{3}\right)^n = C_n^0 + C_n^1 \cdot \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) + C_n^2 \cdot \text{cis}\left(2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) +$$
$$C_n^3 \cdot \text{cis}\left(3 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + C_n^4 \cdot \text{cis}\left(4 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + C_n^5 \cdot \text{cis}\left(5 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) +$$
$$C_n^6 \cdot \text{cis}\left(6 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + C_n^7 \cdot \text{cis}\left(7 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + C_n^8 \cdot \text{cis}\left(8 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) + \ldots$$

$$\text{Mas, } \begin{cases} \text{cis}\left(3 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \text{cis}\left(6 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \ldots = 1 \\ \text{cis}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \text{cis}\left(4 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \text{cis}\left(7 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \ldots \\ \text{cis}\left(2 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \text{cis}\left(5 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \text{cis}\left(8 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) = \ldots \end{cases}$$

Então,

$$\left(1 + \text{cis}\,\frac{2\pi}{3}\right)^n = \left\{C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots + C_n^{3\left[\frac{n}{3}\right]}\right\}$$
$$+ \left\{C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots + C_n^{3\left[\frac{(n-1)}{3}\right]+1}\right\} \cdot \text{cis}\,\frac{2\pi}{3} +$$
$$+ \left\{C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots + C_n^{3\left[\frac{(n-2)}{3}\right]+2}\right\} \cdot \text{cis}\,\frac{4\pi}{3}$$

$$\left(1 + \text{cis}\,\frac{2\pi}{3}\right)^n = S_0 + S_1\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right) + S_2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)$$

$$\left(1 + \frac{\sqrt{3}i}{2} - \frac{1}{2}\right)^n = \frac{2S_0 - S_1 - S_2}{2} + \frac{\sqrt{3}\,(S_1 - S_2)i}{2}$$

$$\text{cis}\left(\frac{n\pi}{3}\right) = \frac{2S_0 - S_1 - S_2}{2} + \frac{\sqrt{3}\,(S_1 - S_2)i}{2}$$

Da igualdade dos números complexos, temos

$$\begin{cases} \dfrac{2S_0 - S_1 - S_2}{2} = \cos\left(\dfrac{n\pi}{3}\right) & (1) \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(S_1 - S_2) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{3}\right) & (2) \\ \text{e ainda sabemos que :} & \\ S_0 + S_1 + S_2 = 2^n & (3) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema formado pelas três equações anteriores, encontramos

$$\boxed{S_0 = \frac{2^n + 2 \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3} \quad \text{e} \quad S_1 = \frac{\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}\frac{n\pi}{3} + 2^n - \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{3}}$$