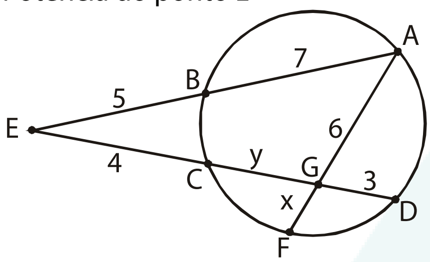
MATEMÁTICA

Seja *E* um ponto externo a uma circunferência. Os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{ED}$ interceptam essa circunferência nos pontos *B* e *A*, e, *C* e *D*, respectivamente. A corda $\overline{AF}$ da circunferência intercepta o segmento $\overline{ED}$ no ponto *G*. Se $EB = 5$, $BA = 7$, $EC = 4$, $GD = 3$ e $AG = 6$, então *GF* vale

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

RESOLUÇÃO:

Potência do ponto E



$EB \cdot EA = EC \cdot ED$

$\Rightarrow\ 5 \cdot 12 = 4\,(7 + y)\ \Rightarrow\ y = 8$

Potência do ponto G

$GA \cdot GF = GC \cdot GD$

$\Rightarrow\ 6 \cdot x = 8 \cdot 3\ \Rightarrow\ x = 4$

RESPOSTA: D

Seja U um conjunto não vazio com n elementos, $n \geq 1$. Seja S um subconjunto de p(U) com a seguinte propriedade:

Se A, B $\in$ S, então $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Então, o número máximo de elementos que S pode ter é

A) 2^{n-1}

B) n/2, se n for par, e (n + 1)/2 se n for ímpar

C) n + 1

D) $2^n - 1$

E) $2^{n-1} + 1$

RESOLUÇÃO:

Se U possui n elementos, o conjunto das partes de U, p(U), terá 2^n elementos.

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}$$

O conjunto das partes de U, p(U), terá

$\binom{n}{0} = 1$ conjunto vazio

$\binom{n}{1} = n$ conjuntos com 1 elemento

$\binom{n}{2} =$ conjuntos com 2 elemento

.
.
.

$\binom{n}{n} = 1$ conjunto com n elementos

De cada tipo de conjunto, só podemos escolher 1 para formarmos o conjunto S. Por exemplo, em P(U) temos **n** conjuntos com 1 elemento. Se escolhermos 1 destes conjuntos para colocarmos em S, automaticamente todos os outros serão eliminados, porque não irão satisfazer a condição $A \subset B$ ou $B \subset A$. Portanto, posso escolher 1 conjunto com n elementos, 1 conjunto com (n – 1) elementos, ..., 1 conjunto com 2 elementos, 1 conjunto com 1 elemento e 1 conjunto vazio. Portanto, o número máximo de elementos de S é n + 1.

RESPOSTA: C

Sejam A e B subconjuntos finitos de um mesmo conjunto X, tais que n(B\A), n(A\B) e n(A $\cap$ B) formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão r > 0. Sabendo que n(B\A) = 4 e n(A$\cup$B) + r = 64, então, n(A\B) é igual a

A) 12

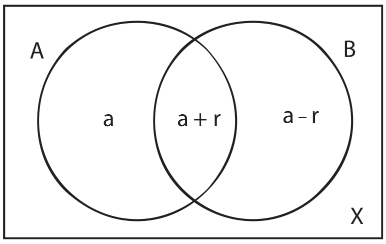
B) 17

C) 20

D) 22

E) 24

RESOLUÇÃO:



Se n(B\A), n(A\B) e n(A$\cap$B) formam uma P.A. de razão r, então

n(B\A) = a – r

n(A\B) = a

n(A$\cap$B) = a + r

Temos

n(B\A) = 4 $\Rightarrow$ a – r = 4 (I)

n(A$\cup$B) + r = 64 $\Rightarrow$ a – r + a + a + r + r = 64 $\Rightarrow$ 3a + r = 64 (II)

(I) + (II): 4a = 68 $\Rightarrow$ a = 17 $\Rightarrow$ **n(A\B) = 17**

RESPOSTA: B

Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{77}\,\text{sen}[5(x + \pi/6)]$ e seja B o conjunto dado por $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$. Se m é o maior elemento de $B \cap (-\infty, 0)$ e n é o menor elemento de $B \cap (0, +\infty)$, então m + n é igual a

A) $2\pi/15$
B) $\pi/15$
C) $-\pi/30$
D) $-\pi/15$
E) $-2\pi/15$

RESOLUÇÃO:

$$f(x) = \sqrt{77} \cdot \text{sen}\left[5\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 0$$

$$\boxed{f(x) = 0} \quad 5\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{k\pi}{5};\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{5};\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{k = 0} \quad x = -\frac{\pi}{6}\ (= m)$$

$$\boxed{k = 1} \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{30}(= n)$$

$$\Rightarrow m + n = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{30} = \frac{-5\pi + \pi}{30} = \frac{-4\pi}{30} = \frac{-2\pi}{15}$$

RESPOSTA: E

Matemática – Questão 05

Considere a equação $(a^x - a^{-x})/(a^x + a^{-x}) = m$, na variável real x, com $0 < a \neq 1$. O conjunto de todos os valores de m para os quais esta equação admite solução real é

A) $(-1, 0) \cup (0, 1)$
B) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C) $(-1, 1)$
D) $(0, \infty)$
E) $(-\infty, +\infty)$

RESOLUÇÃO:

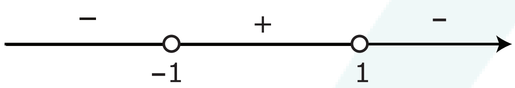
$a^x - a^{-x} = m\,(a^x + a^{-x}) \rightarrow$ multiplicando ambos os lados por a^x, temos

$a^{2x} - 1 = m(a^{2x} + 1)$

$a^{2x}(m - 1) = -1 - m$

$$a^{2x} = \frac{m+1}{1-m} \Rightarrow |a^x| = \sqrt{\frac{m+1}{1-m}}$$

p/ $x \in \mathbb{R}$, devemos ter $\frac{m+1}{1-m} > 0$



$-1 < m < 1$ é o intervalo solicitado para m.

RESPOSTA: C

Considere uma prova com 10 questões de múltipla escolha, cada questão com 5 alternativas. Sabendo que cada questão admite uma única alternativa correta, então o número de formas possíveis para que um candidato acerte somente 7 das 10 questões é

A) $4^4 \cdot 30$

B) $4^3 \cdot 60$

C) $5^3 \cdot 60$

D) $\binom{7}{3} \cdot 4^3$

E) $\binom{10}{7}$

RESOLUÇÃO:

O número de formas possíveis de acertar 7 das 10 questões é

$$\binom{10}{7} \cdot 1^7 \cdot 4^3 = 120 \cdot 4^3 = 30 \cdot 4^4$$

RESPOSTA: A

Considere as seguintes afirmações sobre a expressão $S = \sum_{k=0}^{101} \log_8 \left(4^k \sqrt{2}\right)$:

I. S é a soma dos termos de uma progressão geométrica finita.

II. S é a soma dos termos de uma progressão aritmética finita de razão 2/3.

III. S = 3451.

IV. $S \le 3434 + \log_8 \sqrt{2}$

Então, pode-se afirmar que é (são) **VERDADEIRA(S)** apenas

A) I e III

B) II e III

C) II e IV

D) II

E) III

RESOLUÇÃO:

$$S = \sum_{k=0}^{101} \log_8 \left(4^k \sqrt{2}\right)$$

$$S = \log_8 4^0 \sqrt{2} + \log_8 4^1 \sqrt{2} + \log_8 4^2 \sqrt{2} + \cdots + \log_8 \left(4^{101} \sqrt{2}\right)$$

$$S = \log_8 \left[\left(4^0 \sqrt{2}\right) \cdot \left(4^1 \sqrt{2}\right) \cdot \left(4^2 \sqrt{2}\right) \cdot \left(4^3 \sqrt{2}\right) \cdots \left(4^{101} \sqrt{2}\right)\right]$$

$$S = \log_8 \left[\left(4^{0+1+2\cdots+101} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{102}\right)\right]$$

$$S = \frac{(0+101) \cdot 102}{2} \cdot \frac{2}{3} + 102 \cdot \frac{1}{6} = 3434 + 17 = 3451$$

Então, temos

I. Falsa. Pois os termos estão em P.A de razão $r = \log_8 \left(4^{k+1} \cdot \sqrt{2}\right) - \log_8 \left(4^k \cdot \sqrt{2}\right) = \log_8 4 = \frac{2}{3}$.

II. Verdadeira.

III. Verdadeira.

IV. Falsa. Pois $S > 3434 + \log_8 \sqrt{2} = 3434 + \frac{1}{6}$.

RESPOSTA: B

Se para todo $z \in \mathbb{C}, |f(z)| = |z|$ e $|f(z) - f(1)| = |z - 1|$ então, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\overline{f(1)}\, f(z) + f(1)\, \overline{f(z)}$ é igual a

A) 1
B) 2z
C) 2 Re z
D) 2 Im z
E) $2|z|^2$

RESOLUÇÃO:

$\forall z \in \mathbb{C}$

$$|f(z)| = |z| \qquad \text{(i)}$$

$$|f(z) - f(1)| = |z - 1| \qquad \text{(ii)}$$

Sejam z = a + bi, f(z) = x + yi, f(1) = c + di. Substituindo em (i) e (ii), temos

$$\text{(i)} \qquad x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{(ii)} \qquad |x + yi - c - di| = |a + bi - 1|$$

$$\Updownarrow$$

$$(x - c)^2 + (y - d)^2 = (a - 1)^2 + b^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{x^2} - 2xc + c^2 + \cancel{y^2} - 2yd + d^2 = \cancel{a^2} - 2a + 1 + \cancel{b^2}$$

como $|f(1)| = 1$, ou seja $c^2 + d^2 = 1$, $xc + yd = a$.

$$\overline{f(1)} \cdot f(z) + f(1) \cdot \overline{f(z)} = (c - di) \cdot (x + yi) + (c + di) \cdot (x - yi) = 2cx + 2dy = 2a = 2\,\text{Re}\, z$$

RESPOSTA: C

Matemática – Questão 09

O conjunto solução de $(tg^2x - 1)(1 - cotg^2x) = 4$, $x \neq k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, é

A) $\{\pi/3 + k\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}\}$

B) $\{\pi/4 + k\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}\}$

C) $\{\pi/6 + k\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}\}$

D) $\{\pi/8 + k\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}\}$

E) $\{\pi/12 + k\pi/4,\ k \in \mathbb{Z}\}$

RESOLUÇÃO:

$$\frac{sen^2x}{cos^2 x} - 1 \,.\, \left(1 - \frac{cos^2 x}{sen^2x}\right) = 4$$

$$\left(\frac{sen^2x - cos^2 x}{cos^2 x}\right) \cdot \left(\frac{sen^2x - cos^2x}{sen^2x}\right) = 4$$

$$\left(sen^2x - cos^2 x\right)^2 = \left(2senx \cdot cos\,x\right)^2$$

$$\left(-cos\,2x\right)^2 = \left(sen2x\right)^2$$

$$cos^2\,2x - sen^2\,2x = 0$$

$$cos\,4x = 0$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

RESPOSTA: D

Se $\alpha \in [0, 2\pi)$ é o argumento de um número complexo $z \neq 0$ e n é um número natural tal que $(z/|z|)^n = i sen(n\alpha)$, então, é **VERDADE** que

A) $2n\alpha$ é múltiplo de 2π

B) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo de 2π

C) $n\alpha - \pi/4$ é múltiplo de $\pi/2$

D) $2n\alpha - \pi$ é múltiplo não nulo de 2

E) $n\alpha - 2\pi$ é múltiplo de π

RESOLUÇÃO:

$$\left(\frac{z}{|z|}\right)^n = i \cdot sen(n\alpha) \Leftrightarrow \left(\frac{|z| \cdot cis\alpha}{|z|}\right)^n = i \cdot sen(n\alpha) \Leftrightarrow cos(n\alpha) + i \cdot sen(n\alpha) = i \cdot sen(n\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cos(n\alpha) = 0 \Leftrightarrow n\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow 2n\alpha = \pi + 2k\pi \Leftrightarrow 2n\alpha - \pi = 2k\pi$$

Logo, $2n\alpha - \pi$ é multiplo de 2π.

RESPOSTA: B

A condição para que as constantes reais a e b tornem incompatível o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 5z = 1 \\ 2x + 2y + az = b \end{cases}$$ é

A) a – b ≠ 2
B) a + b = 10
C) 4a – 6b = 0
D) a/b = 3/2
E) a . b = 24

RESOLUÇÃO:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & a \end{vmatrix} = 2a + \cancel{10} + 6 - 12 - \cancel{10} - a = a - 6$$

$$D = 0 \Rightarrow a - 6 = 0 \Rightarrow a = 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 5z = 1 \\ 2x + 2y + 6z = b \end{cases}$$

Escalonando, temos

$$\begin{array}{l} \\ (L_2 - L_1) \\ (L_3 - 2L_1) \end{array} \quad \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ \quad y + 2y = -1 \\ \qquad 0 = b - 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Se a = 6 e b = 4, o sistema é compatível e indeterminado. Logo, para que o sistema seja incompatível, devemos ter

a = 6 e b ≠ 4

$\Rightarrow$ a – b ≠ 2

RESPOSTA: A

Se det $\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$, então o valor do det $\begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$ é igual a

A) 0
B) 4
C) 8
D) 12
E) 16

RESOLUÇÃO:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p & 2q & 2r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2)(2) = 4$$

$$\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 4$$

$$\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 = 12$$

RESPOSTA: D

Seja p um polinômio com coeficientes reais, de grau 7, que admite 1 – i como raiz de multiplicidade 2. Sabe-se que a soma e o produto de todas as raízes de p são, respectivamente, 10 e –40. Sendo afirmado que três raízes de p são reais e distintas e formam uma progressão aritmética, então, tais raízes são

A) $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{193}}{6}$, 3, $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{193}}{6}$
B) $2 - 4\sqrt{13}$, 2, $2 + 4\sqrt{13}$
C) – 4, 2, 8
D) – 2, 3, 8
E) – 1, 2, 5

RESOLUÇÃO:

p(x) tem coeficientes reais e admite 1 – i como raiz dupla $\Rightarrow$ 1 + i também é raiz dupla de p(x) com multiplicidade 2.

Portanto, as raízes de p(x) são 1 + i, 1 + i, 1 – i, 1 – i, a – r, a, a + r.

Calculemos a soma S e o produto P das raízes de p(x):

$S = 4 + 3a = 10 \Rightarrow a = 2$

$P = 2.2\ (2 - r)\ .\ 2\ .\ (2 + r) = -40 \Rightarrow 4 - r^2 = -5 \Rightarrow r = \pm 3$

Então, as raízes reais de p(x) são –1, 2 e 5.

RESPOSTA: E

Matemática — Questão 14

Sobre o polinômio $p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2$, podemos afirmar que

A) $x = 2$ não é raiz de p.

B) p só admite raízes reais, sendo uma delas inteira, duas racionais e duas irracionais.

C) p admite uma única raiz real, sendo ela uma raiz inteira.

D) p só admite raízes reais, sendo duas delas inteiras.

E) p admite somente 3 raízes reais, sendo uma delas inteira e duas irracionais.

RESOLUÇÃO:

$p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2$

Note que, igualando a zero o segundo termo do produto, temos uma equação recíproca de 1ª espécie e grau par, cujo processo de resolução é bem conhecido:

2	1	0	−5	4	−3	−2
	1	2	−1	2	1	0

$$p(x) = (x - 2)(x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1)$$

$$x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0 \quad \div (x^2)$$

$$x^2 + 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 3 = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = -3 \qquad \text{ou} \qquad x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \qquad\qquad x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Delta = 5 \qquad\qquad \Delta = -3$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad\qquad x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

As raízes de p(x) são 2, $\dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ e $\dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

RESPOSTA: E

Seja o sistema linear nas incógnitas x e y, com a e b reais, dado por

$$\begin{cases}(a-b)x-(a+b)y=1\\(a+b)x+(a-b)y=1\end{cases}$$

Considere as seguintes afirmações:

I. O sistema é possível e indeterminado se a = b = 0.

II. O sistema é possível e determinado se a e b não são simultaneamente nulos.

III. $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^{-1}$, se $a^2 + b^2 \neq 0$.

Então, pode-se afirmar que é (são) **VERDADEIRA(S)** apenas

A) I

B) II

C) III

D) I e II

E) II e III

RESOLUÇÃO:

$$D = \begin{vmatrix} a-b & -(a+b) \\ a+b & a-b \end{vmatrix} = 2a^2 + 2b^2$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -(a+b) \\ 1 & a-b \end{vmatrix} = 2a$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a-b & 1 \\ a+b & 1 \end{vmatrix} = -2b$$

(I) $a^2 + b^2 \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ ou $b \neq 0$

Nesta situação, $D \neq 0$ e o sistema é possível e determinado.

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2+b^2}{(a^2+b^2)^2} = (a^2 + b^2)^{-1}$$

(II) $a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0$ e $b = 0$

Substituindo-se a = 0 e b = 0 no sistema, tem-se

$$\begin{cases}0=1\\0=1\end{cases} \Rightarrow \text{Sistema Impossível}$$

Assim, tem-se

I – F, II – V, III – V

RESPOSTA: E

Considere o polinômio $p(x) = x^3 - (a + 1)x + a$, em que $a \in \mathbb{Z}$. O conjunto de todos os valores de a, para os quais o polinômio p(x) só admite raízes inteiras, é

A) $\{2n, n \in \mathbb{N}\}$
B) $\{4n^2, n \in \mathbb{N}\}$
C) $\{6n^2 - 4n, n \in \mathbb{N}\}$
D) $\{n(n+1), n \in \mathbb{N}\}$
E) $\mathbb{N}$

RESOLUÇÃO:

$p(x) = x^3 - (a + 1)\, x + a$

$p(x) = x^3 - ax - x + a$

$p(x) = x^3 - x - ax + a$

$p(x) = x(x^2 - 1) - a(x - 1)$

$p(x) = x(x + 1)(x - 1) - a(x - 1)$

$p(x) = (x - 1) . (x^2 + x - a) = 0$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

ou

$x^2 + x - a = 0$

(i) Se existir uma raiz inteira x = n para esta equação de 2º grau, tem-se $n^2 + n - a = 0$, logo

$a = n(n + 1)$

(ii) Se $a = n(n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$

$x^2 + x - n(n + 1) = 0$

cujas raízes são inteiras e valem

$x_1 = -n - 1$ e $x_2 = n$

Logo, o conjunto é $\{n(n+1), n \in \mathbb{Z}\}$. Note, entretanto, que o produto de dois quaisquer números negativos consecutivos pode ser expresso como o produto de dois positivos consecutivos $((-4), (-3) = 3 \cdot 4)$, e então basta tornar n natural para que n . (n+1) percorra todos os valores possíveis de a, e então o conjunto procurado é $\{n(n + 1), n \in \mathbb{N}\}$.

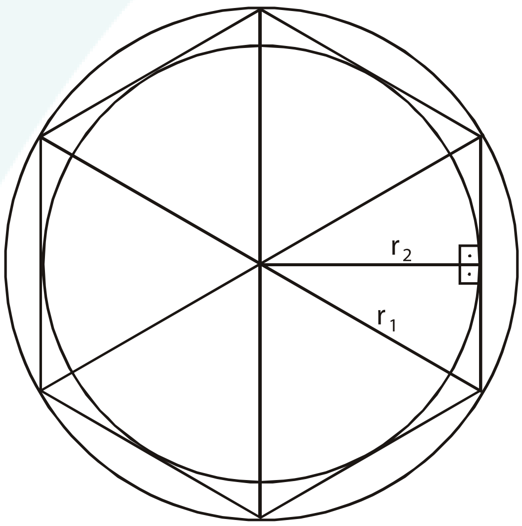
RESPOSTA: D

Numa circunferência C_1 de raio r_1 = 3 cm está inscrito um hexágono regular H_1; em H_1 está inscrita uma circunferência C_2; em C_2 está inscrito um hexágono regular H_2 e, assim, sucessivamente. Se A_n (em cm²) é a área do hexágono H_n, então $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ (em cm²) é igual a

A) $54\sqrt{2}$
B) $54\sqrt{3}$
C) $36\left(1+\sqrt{3}\right)$
D) $\dfrac{27}{\left(2-\sqrt{3}\right)}$
E) $30\left(2+\sqrt{3}\right)$

RESOLUÇÃO:

No desenho, tem-se as circunferências C_1 e C_2 e o hexágono H_1.



Sabe-se que as três diagonais maiores de um hexágono regular dividem-no em 6 triângulos equiláteros.

Assim, $A_1 = \dfrac{6.r_1^2\sqrt{3}}{4}$ e $r_2 = \dfrac{r_1\sqrt{3}}{2}$, logo $A_2 = \dfrac{6.r_2^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{6.\left(r_1\sqrt{3}/2\right)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3}{4}.A_1$.

Analogamente tem-se $A_{n+1} = \dfrac{3}{4}.A_n$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 + \frac{3}{4}A_1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 A_1 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 A_1 + \cdots$$

que é a soma de uma P.G. infinita de razão q, $-1 < q = \dfrac{3}{4} < 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_1}{1-q} = \frac{A_1}{1-\frac{3}{4}} = 4A_1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = 4\cdot\frac{6r_1^2\sqrt{3}}{4} = 6r_1^2\sqrt{3} = 54\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

RESPOSTA: B

Sejam a reta s : 12x – 5y + 7 = 0 e a circunferência C : $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 11$. A reta p, que é perpendicular a s e é secante a C, corta o eixo Oy num ponto cuja ordenada pertence ao seguinte intervalo

A) $\left(-\frac{91}{12}, -\frac{81}{12}\right)$

B) $\left(-\frac{81}{12}, -\frac{74}{12}\right)$

C) $\left(-\frac{74}{12}, -\frac{30}{12}\right)$

D) $\left(\frac{30}{12}, \frac{74}{12}\right)$

E) $\left(\frac{75}{12}, \frac{91}{12}\right)$

RESOLUÇÃO:

s: 12x – 5y + 7 = 0

$\boxed{p \perp s}$ p: 5x + 12y + c = 0

$x^2 + y^2 + 4x + 2y = 11$

$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 11 + 4 + 1$

$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$

$\Rightarrow \begin{cases} O(-2, -1) \\ r = 4 \end{cases}$

Vamos obter as retas paralelas a p, tangentes à circunferência

d (O, p) = 4

$$\frac{|5(-2) + 12(-1) + c|}{\sqrt{(5)^2 + (12)^2}} = 4$$

$$\frac{|c - 22|}{13} = 4 \Rightarrow |c - 22| = 52$$

$c - 22 = 52 \Rightarrow \boxed{c = 74}$

ou

$c - 22 = -52 \Rightarrow \boxed{c = -30}$

$p_1: 5x + 12y + 74 = 0$

$\Rightarrow y = -\frac{5}{12}x - \frac{74}{12}$

$p_2: 5x + 12y - 30 = 0$

$\Rightarrow y = -\frac{5}{12}x + \frac{30}{12}$

Logo, a ordenada y da reta p secante à circunferência deve pertencer ao intervalo $\left(-\frac{74}{12}, \frac{30}{12}\right)$.

RESPOSTA: NÃO HÁ ALTERNATIVA

Matemática – Questão 19

Os focos de uma elipse são $F_1(0, -6)$ e $F_2(0, 6)$. Os pontos $A(0, 9)$ e $B(x, 3)$, $x > 0$, estão na elipse. A área do triângulo com vértices em B, F_1 e F_2 é igual a

A) $22\sqrt{10}$

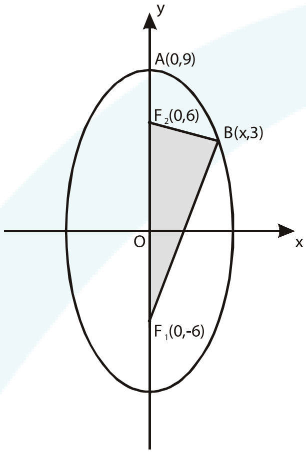
B) $18\sqrt{10}$

C) $15\sqrt{10}$

D) $12\sqrt{10}$

E) $6\sqrt{10}$

RESOLUÇÃO:



$$\left.\begin{array}{l} F_1\,(0,-6) \\ F_2\,(0,6) \end{array}\right\} c = 6$$

$$d(A,F_1) + d(A,F_2) = 2a$$

$$15 + 3 = 2a \Rightarrow a = 9$$

RF

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$9^2 = b^2 + 6^2$$

$$b^2 = 81 - 36$$

$$\mathbf{b = 3\sqrt{5}}$$

$$E:\ \frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{81} = 1$$

$$B(x, 3) \in E$$

$$\frac{x^2}{45} + \frac{3^2}{81} = 1$$

$$\frac{x^2}{45} + \frac{1}{9} = 1$$

$$\frac{x^2 + 5}{\cancel{45}} = \frac{45}{\cancel{45}}$$

$$x^2 = 40$$

$$\mathbf{x = \pm\, 2\sqrt{10}}$$

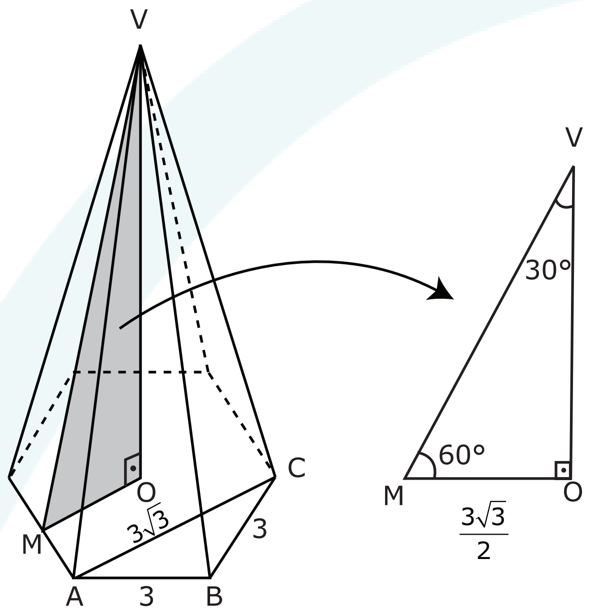
$$S_{\Delta BF_1F_2} = \frac{12\ \cancel{2}\sqrt{10}}{\cancel{2}} = 12\sqrt{10}$$

RESPOSTA: D

Uma pirâmide regular tem por base um hexágono cuja diagonal menor mede $3\sqrt{3}$ cm. As faces laterais desta pirâmide formam diedros de 60° com o plano da base. A área total da pirâmide, em cm², é

A) $81\sqrt{3}/2$ B) $81\sqrt{2}/2$ C) $81/2$ D) $27\sqrt{3}$ E) $27\sqrt{2}$

RESOLUÇÃO:



Se a diagonal menor do hexágono vale $3\sqrt{3}$ cm, então seu lado mede 3 cm e seu apótema $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm. Assim,

$\overline{VO} = \frac{9}{2}$ cm e $\overline{VM} = 3\sqrt{3}$ cm

Ainda

$A_t = A_b + A_l$

$$A_t = 6 \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{3.3\sqrt{3}}{2} = \mathbf{\frac{81\sqrt{3}}{2}\ cm^2}$$

RESPOSTA: A

Considere A um conjunto não vazio com um número finito de elementos. Dizemos que
$F = \{A_1, \ldots, A_m\} \subset p(A)$ é uma partição de A se as seguintes condições são satisfeitas:

I. $A_i \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, m$

II. $A_i \cap A_j = \varnothing$, se $i \neq j$, para $i, j = 1, \ldots, m$

III. $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$

Dizemos ainda que F é uma partição de ordem k se $n(A_i) = k$, $i = 1, \ldots, m$. Supondo que $n(A) = 8$, **DETERMINE**

A) as ordens possíveis para uma partição de A.

B) o número de partições de A que têm ordem 2.

Resolução:

A) A tem 8 elementos. Então, as possíveis ordens para uma partição de A são os divisores naturais de 8: 1, 2, 4 e 8.

B) Uma partição de ordem 2 terá 4 subconjuntos de A, cada qual com dois elementos. O número de partições possíveis é:

$$n = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}}{4!} \Rightarrow \frac{8!}{6!\ 2!} \cdot \frac{6!}{2!\ 4!} \cdot \frac{4!}{2!\ 2!} \cdot \frac{1}{4!} = 105.$$

Matemática — Questão 22

Seja f: [0, 1) → ℝ definida por $f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}$

Seja g : (−1/2, 1/2) → ℝ dada por $g(x) = \begin{cases} f(x + 1/2), & -1/2 < x < 0 \\ 1 - f(x + 1/2), & 0 \leq x < 1/2 \end{cases}$, com f definida acima.

Justificando a resposta, **DETERMINE** se g é par, ímpar ou nem par nem ímpar.

RESOLUÇÃO:

Seja $a \in [0, 1/2)$, então calculemos:

$g(a)1 - f(a + 1/2) = 1 - [2(a + 1/2) - 1] = -2a + 1$ e

$g(-a) = f(-a + 1/2) = 2(-a + 1/2) = -2a + 1$

$g(a) = g(-a) \Rightarrow g(x)$ é par

DETERMINE o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^9$.

RESOLUÇÃO:

No produto $(1 + x + x^2) . (1 + x + x^2) .... (1 + x + x^2)$, para termos x^4 devemos pegar $1^i . x^j . (x^2)^k$, em que $i + j + k = 9$ e $j + 2k = 4$

Possibilidades:

k	j	i	Resulta:
0	4	5	$\binom{9}{4} = 126$
1	2	6	$\binom{9}{1} \cdot \binom{8}{2} = 252$
2	0	7	$\binom{9}{2} = 36$

Soma: 414

Resposta: o coeficiente de x^4 é 414

DETERMINE para quais valores de $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ vale a desigualdade
$\log_{\cos x}(4\text{sen}^2x - 1) - \log_{\cos x}(4 - \sec^2 x) > 2.$

RESOLUÇÃO:

Condições de existência da inequação

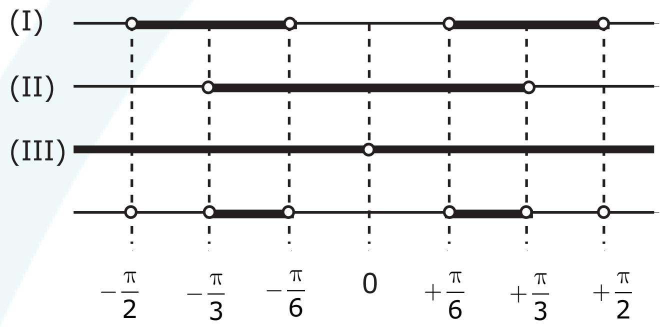
1ª. $4\text{sen}^2x - 1 > 0 \Rightarrow \text{sen}^2x > \frac{1}{4} \Rightarrow |\text{sen}| > \frac{1}{2}$ e $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ (I)

2ª. $4 - \sec^2 x > 0 \Rightarrow \sec^2 x < 4 \Rightarrow |\sec x| < 2$ e $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$ (II)

3ª. $\cos x > 0$ e $\cos x \neq 1$ e $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq 0$ (III)

Fazendo a interseção de (I), (II) e (III), temos



$-\frac{\pi}{3} < x < -\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$ (IV)

Resolvendo a inequação:

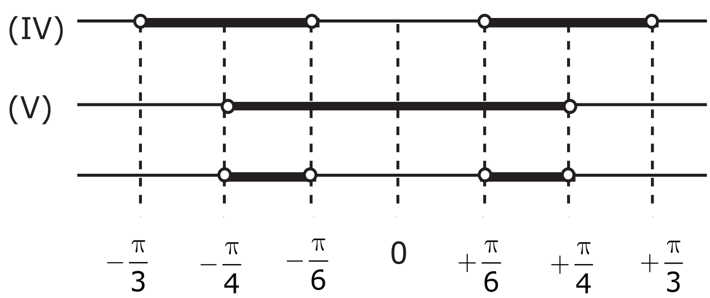
$\log_{\cos x}(4\text{sen}^2x - 1) - \log_{\cos x}(4 - \sec^2 x) > 2 \Rightarrow \log_{\cos x}\left[\frac{4\text{sen}^2x - 1}{4 - \sec^2 x}\right] > 2$

$\Rightarrow \frac{4\text{sen}^2x - 1}{4 - \sec^2 x} < \cos^2 x \Rightarrow 4\text{sen}^2x - 1 < \cos^2 x(4 - \sec^2 x)$

$\Rightarrow 4\text{sen}^2x - 1 < 4\cos^2 x - 1 \Rightarrow \text{sen}^2x < \cos^2 x \Rightarrow \frac{\text{sen}^2x}{\cos^2 x} < 1$

$\Rightarrow \tan^2 x < 1 \Rightarrow |\tan x| < 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ (V)

Fazendo a interseção de IV e V, temos



$S = \left\{x \in \mathbb{R} / -\frac{\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}\right\}$

Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$, com raízes reais. O coeficiente a é racional e a diferença entre duas de suas raízes também é racional. Nestas condições, analise se a seguinte afirmação é **VERDADEIRA**:

"Se uma das raízes de p(x) é racional, então todas as suas raízes são racionais."

RESOLUÇÃO:

Sendo todas as raízes reais, temos as seguintes possibilidades:

1º caso: todas as raízes irracionais.

IMPOSSÍVEL, pois, como os coeficientes do polinômio são racionais, as raízes reais se apresentam aos pares.

2º caso: uma raiz irracional e duas raízes racionais.

IMPOSSÍVEL, pois isso implicaria, pelas ralações de Girard, que o termo independente fosse irracional.

3º caso: duas raízes irracionais e uma raiz racional.

Seja k a raiz racional.

As raízes irracionais são da forma $p + q$ e $p - q$, em que p é racional e q é irracional.

A diferença entre duas quaisquer dessas três raízes é sempre irracional.

Logo, este caso é IMPOSSÍVEL.

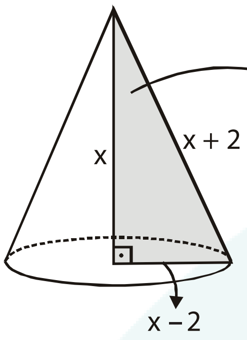
4º caso: As três raízes são racionais.

POSSÍVEL. E como os casos anteriores se mostraram impossíveis, trata-se da ÚNICA possibilidade.

Logo, a afirmação é **VERDADEIRA**.

As medidas, em metros, do raio da base, da altura e da geratriz de um cone circular reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2 metros. **CALCULE** a área total deste cone em m^2.

RESOLUÇÃO:



$$(x + 2)^2 = x^2 + (x - 2)^2$$

$$x = 8$$

H = 8 m

R = 6 m

g = 10 m

$A_{TOTAL} = A_{BASE} + A_{LATERAL} = \pi R\ (g + R) = \pi \cdot 6 \cdot 16 = 96\pi\ m^2$

Resposta: $A_{TOTAL} = 96\pi\ m^2$

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & \frac{1}{2} & 5 \end{bmatrix}$$

DETERMINE o elemento c_{34} da matriz $C = (A + B)^{-1}$.

RESOLUÇÃO:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Substituindo a 1ª linha pela soma da 1ª com a 2ª linha e aplicando o teorema de Chió, calculamos o det(A + B):

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 99 = \det(A + B)$$

$$Cof_{43} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -18$$

$$c_{34} = \frac{Cof_{43}}{\det(A + B)} = \frac{-18}{99} = -\frac{2}{11}$$

RESPOSTA: $c_{34} = -\frac{2}{11}$

Matemática — Questão 28

Seja (a_1, a_2, a_3,..., a_n,...) uma progressão geométrica infinita de razão positiva r, em que a_1 = a é um número real não nulo. Sabendo que a soma de todos os termos de índices pares desta progressão geométrica é igual a 4 e que a soma de todos os termos de índices múltiplos de 3 é 16/13, **DETERMINE** o valor de a + r.

RESOLUÇÃO:

A P.G. é (a, ar, ar^2, ar^3, ...)

$$\begin{cases} ar + ar^3 + ar^5 + \cdots = 4 \\ ar^2 + ar^5 + ar^8 + \cdots = \dfrac{16}{13} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot \dfrac{r}{1-r^2} = 4 \quad (\text{I}) \\ a \cdot \dfrac{r^2}{1-r^3} = \dfrac{16}{13} \quad (\text{II}) \end{cases}$$

Dividindo (I) por (II), temos

$$\frac{1-r^3}{r\left(1-r^2\right)} = \frac{13}{4} \qquad \frac{1+r+r^2}{r\left(1+r\right)} = \frac{13}{4}, \text{pois } r \neq 1.$$

$$4r^2 + 4r + 4 = 13r^2 + 13r$$

$$9r^2 + 9r - 4 = 0$$

$$\boxed{r' = \frac{1}{3}} \qquad r'' = -\frac{4}{3}\left(\text{não convém}\right)$$

Substituindo em (I), temos

$$a = \frac{4 \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right)}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{32}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{32}{3}$$

$$a + r = \frac{32}{3} + \frac{1}{3} = 11$$

RESPOSTA: a + r = 11

Sabendo que $9y^2 - 16x^2 - 144y + 224x - 352 = 0$ é a equação de uma hipérbole, **CALCULE** sua distância focal.

RESOLUÇÃO:

$9y^2 - 16x^2 - 144y + 224x - 352 = 0$

$9y^2 - 144y + 576 - (16x^2 - 224x + 784) = 352 + 576 - 784$

$(3y - 24)^2 - (4x - 28)^2 = 144$

$9(y - 8)^2 - 16(x - 7)^2 = 144\ (\div\ 144)$

$$\frac{(y-8)^2}{16} - \frac{(x-7)^2}{9} = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

RF $\quad c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 4^2 + 3^2$

$c^2 = 25$

$c = 5$

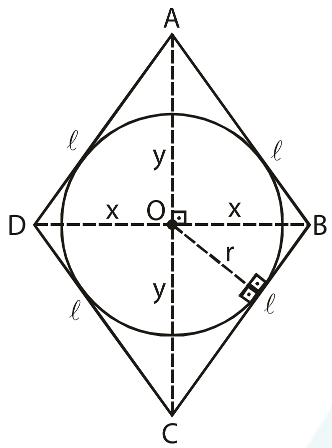
$\Rightarrow$ Distância focal = $2c = 10$

RESPOSTA: 10

Matemática — Questão 30

Considere um losango ABCD cujo perímetro mede 100 cm e cuja maior diagonal mede 40 cm. **CALCULE** a área, em cm^2, do círculo inscrito neste losango.

RESOLUÇÃO:



$AB = BC = CD = DA = \ell$

$4\ell = 100$ cm

$\ell = 25$ cm

$BO = DO = x$

$AO = CO = y = 20$ cm

$x^2 + y^2 = \ell^2$

$x = 15$ cm

E usando-se a relação métrica de triângulo retângulo $\ell . r = x . y$, vem:

$25 . r = 15 . 20$

$r = 12$ cm

$S = \pi r^2$

$S = 144\pi$ cm^2

RESPOSTA: *144π cm^2*