MATEMÁTICA

Matemática – Questão 01

Uma pesquisa foi feita com um grupo de pessoas que frequentam, pelo menos, uma das três livrarias, A, B e C. Foram obtidos os seguintes dados:

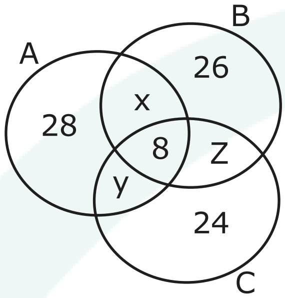
. das 90 pessoas que frequentam a Livraria A, 28 não frequentam as demais;

. das 84 pessoas que frequentam a Livraria B, 26 não frequentam as demais;

. das 86 pessoas que frequentam a Livraria C, 24 não frequentam as demais;

. oito pessoas frequentam as três livrarias.

1. **DETERMINE** o número de pessoas que frequentam apenas uma das livrarias.



2. **DETERMINE** o número de pessoas que frequentam, pelo menos, duas livrarias.
3. **DETERMINE** o número total de pessoas ouvidas nessa pesquisa.

RESOLUÇÃO:

1. Apenas uma = 28+26+24 = 78 pessoas

2. $\begin{cases} x + y = 54 \\ x + z = 50 \\ y + z = 54 \end{cases}$ $\quad x = 25$, $y = 29$, $z = 25$

Pelo menos uma = x + y + z + 8 = 87 pessoas.

3. Total = 165 pessoas

Matemática — Questão 02

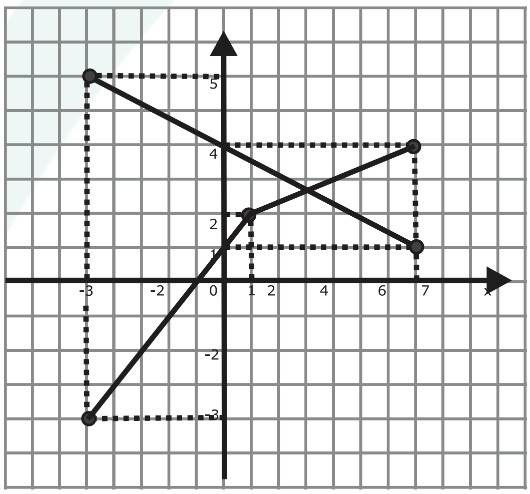
Considere estas funções reais:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}, & \text{se } x<1\\ \frac{1}{3}x+\frac{5}{3}, & \text{se } x\geq 1\end{cases} \text{ e } g(x)=-\frac{2}{5}x+\frac{19}{5}$$

1. **ESBOCE**, neste plano cartesiano, o gráfico de cada uma dessas funções no intervalo 7 – 3 ≤ x ≤ 7.
2. **DETERMINE** o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$.
3. **DETERMINE** o conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\}$.

RESOLUÇÃO:

1.



2. f(x) = 0
   (do gráfico x<1)

$$\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}=0 \rightarrow x=-\frac{3}{5}$$

3. f(x) = g(x)
   (do gráfico x>1)

$$\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}=-\frac{2}{5}x+\frac{19}{5}$$

$$x=\frac{32}{11}$$

Matemática – Questão 03

Uma indústria produz dois tipos de fertilizante líquido, $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$, usando apenas os produtos líquidos **P** e **Q**.

O fertilizante $\mathbf{F_1}$ é fabricado misturando-se esses produtos na proporção de 5 litros de **P** para cada 3 litros de **Q**. Por sua vez, o fertilizante $\mathbf{F_2}$ resulta da mistura de 7 litros de **P** para cada 2 litros de **Q**.

1.**DETERMINE** a quantidade do produto **Q** a ser usada na fabricação de 260 litros do fertilizante $\mathbf{F_1}$.

Certa vez, durante a fabricação do fertilizante $\mathbf{F_2}$, verificou-se que a composição da mistura era de 80% do produto **P** e 20% do produto **Q**, estando, portanto, errada. Já haviam sido fabricados 200 litros desse fertilizante. Para corrigir esse erro, foi acrescentada à mistura uma certa quantidade do fertilizante $\mathbf{F_1}$.

2. **DETERMINE** a quantidade do fertilizante $\mathbf{F_1}$ que foi acrescentada à mistura.

RESOLUÇÃO:

1. $X_a = \frac{3}{8} \cdot 260 \text{ L} = 97{,}5 \text{ litros de Q}$

2.

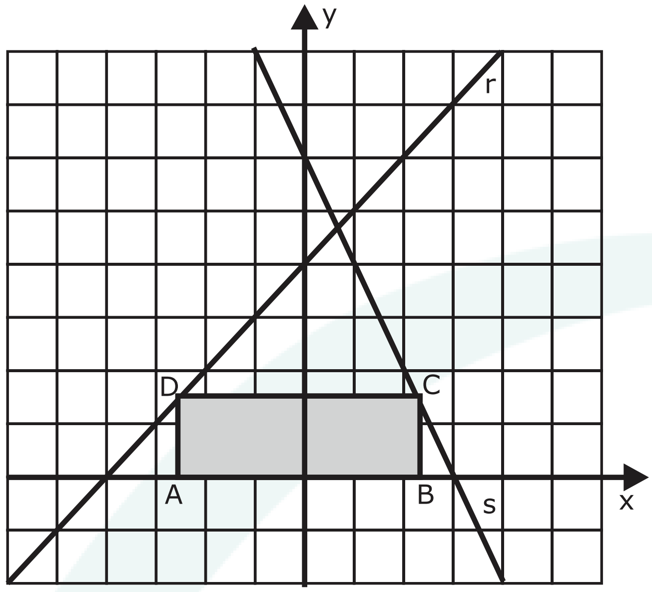
$$2200 \text{ litros } F_2 \begin{cases} 80\% \quad 1760 \text{ L de P} \\ 20\% \quad 440 \text{ L de Q} \end{cases}$$

$$8x \text{ litros } F_1 \begin{cases} 5\,x \text{ L de P} \\ 3\,x \text{ L de Q} \end{cases}$$

$$\frac{n^\circ \text{ litros P em } F_2}{n^\circ \text{ litros Q em } F_2} = \frac{7}{2} \rightarrow \frac{5x + 1760}{3x + 440} = \frac{7}{2}$$

$$x = 40 \rightarrow 8x = 320 \text{ litros } F_1$$

Neste plano cartesiano, estão representados o retângulo ABCD e as retas r e s:



Sabe-se que:

- a equação de r é $y = x + 4$ e a equação de s é $y = -2x + 6$;
- os pontos D e C pertencem, respectivamente, às retas r e s e têm ordenadas positivas; e
- $A = (a, 0)$ e $B = (b, 0)$, sendo $a < b$.

1. **CALCULE** a área do retângulo ABCD em função apenas de b.
2. **DETERMINE** o valor de b para que a área do retângulo ABCD seja **máxima** e **CALCULE** essa área.

RESOLUÇÃO:

1. C $(b, -2b + 6)$

   D $(a, a + 4)$

   $a + 4 = -2b + 6$

   $a = -2b + 2$

   $S = (b - a)(-2b + 6)$

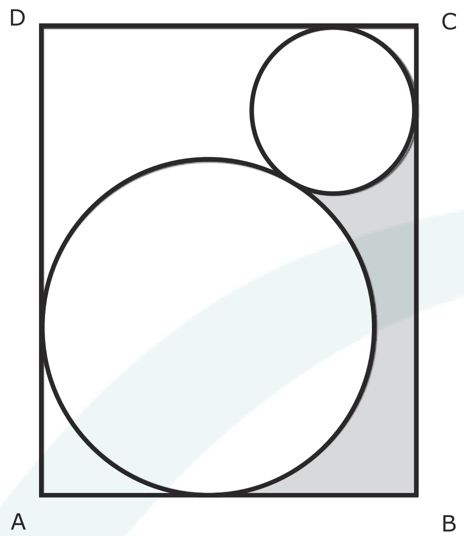
   $S = -6b^2 + 22b - 12$

2.

$$S_{max} = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{49}{6}$$

$$X_v = -\frac{b}{2a} = \frac{11}{6}$$

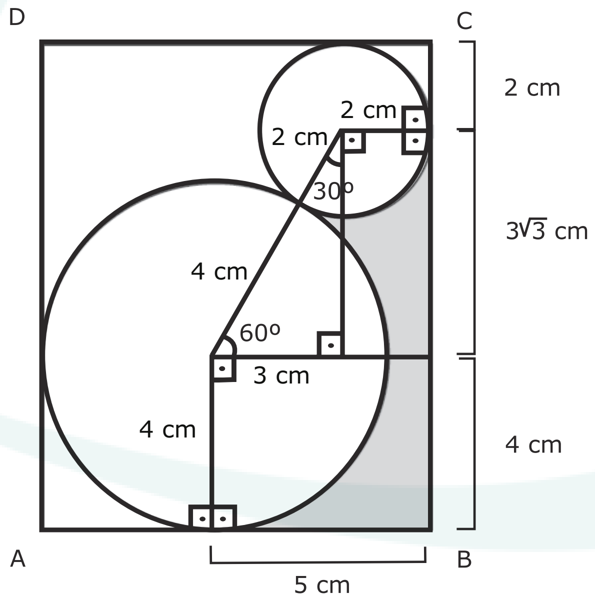
Nesta figura, os dois círculos são tangentes entre si e tangentes aos lados do retângulo *ABCD*:



Sabe-se que

• o raio do círculo menor e o do círculo maior medem, respectivamente, 2 cm e 4 cm; e

• o lado *AB* do retângulo mede 9 cm.



1. **CALCULE** o comprimento do lado *AD* do retângulo.
2. **CALCULE** a área da região sombreada na figura.

RESOLUÇÃO:

1. $AD = 6 + 3\sqrt{3} = 3(2 + \sqrt{3})$ cm

2. $A_{HAC^{\bullet}} = 5 \,.\, 4 + (5 + 2) \,.\, \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{120^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 2^2 - \frac{150^\circ}{360^\circ} \pi \cdot 4^2$

$A_{HAC^{\bullet}} = \left(20 + \frac{21\sqrt{3}}{2} - 8\pi\right) cm^2$

Matemática — Questão 06

Considere o polinômio

$P(x) = x^4 - 2mx^2 + 2m - 1$

sendo m um número real maior que $\frac{1}{2}$.

1. **CALCULE** as raízes de *p(x)* em função de *m*.
2. **DETERMINE** os valores de *m* para que *p(x)* tenha quatro raízes distintas e em progressão aritmética.

RESOLUÇÃO:

1. $p(x) = x^4 - 2mx^2 + 2m - 1 = 0$

   Fazendo $x^2 = y$, temos:

   $y^2 - 2my + 2m - 1 = 0$

   $\Delta = (-2m)^2 - 4 \cdot (2m - 1) = (2m - 2)^2$

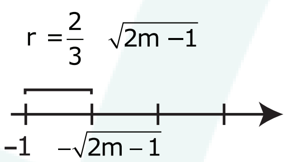
$$y = \frac{2m \pm |2m - 2|}{2} \left\langle \begin{array}{l} y' = 2m - 1 \\ y'' = 1 \end{array} \right.$$

$x^2 = y$

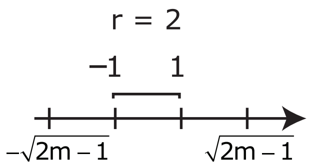
$x = \pm 1$ ou

$x = \pm\sqrt{2m - 1}$

2.



ou



$1 - \sqrt{2m - 1} = \frac{2}{3}$ ou $\sqrt{2m - 1} - 1 = 2$

$\boxed{m = \frac{5}{9}}$ $\boxed{m = 5}$

Matemática – Questão 07

Seja $z = (a + i)^3$ um número complexo, sendo a um número real.

1. **ESCREVA** z na forma $x + i\,y$, sendo x e y números reais.
2. **DETERMINE** os valores de a para que z seja um número imaginário puro.

RESOLUÇÃO:

1. $\mathbb{Z} = (a+1)^3 = a^3 + 3a^2i + 3ai^2 + i^3$

$$= \underbrace{(a^3 - 3a)}_{x} + \underbrace{(3a^2 - 1)}_{y}i$$

2. Para $\mathbb{Z}$ ser imaginário puro

$$\begin{cases} a^3 - 3a = 0 \\ 3a^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} a = 0 \text{ ou} \\ a = \pm\sqrt{3} \end{matrix}$$

Matemática – Questão 08

Seja S o conjunto dos números naturais de 1 a 100.

1. **DETERMINE** a probabilidade de se escolherem **dois** números distintos de S de forma que a soma deles seja um número par.
2. **DETERMINE** a probabilidade de se escolherem **dois** números distintos de S de forma que a soma deles seja divisível por 3.

RESOLUÇÃO:

1. Soma par: dois pares ou dois ímpares

   P = P(par) . P(par) + P(ímpar) . P(ímpar)

   $$P = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} + \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} = \frac{49}{99}$$

2. Para que a soma de dois números seja divisível por 3, devemos pegar dois múltiplos de 3 ou um número que deixa resto 1 e outro que deixa resto 2.

   Temos
   - 34 números que deixam resto 1
   - 33 deixam resto 2
   - 33 múltiplos de 3

   $$P = \frac{C_{33,2} + C_{34,1} \cdot C_{33,1}}{C_{100,2}} = \frac{1}{3}$$